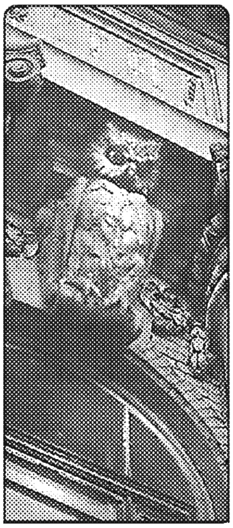
МАТЕМАТИКА



Научный отдел

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 4–16
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 4–16
https://mmi.sgu.ru
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16
EDN: https://elibrary.ru/DXTJFB

Научная статья
УДК 517

Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака с суммируемым потенциалом

Э. Дж. Ибадов

Азербайджанский государственный педагогический университет, Азербайджан, AZ1000, г. Баку, ул. Узеира Гаджибекова, д. 68

Ибадов Эльчин Джамал оглы, доцент кафедры математического анализа, e.c_ibadov@yahoo.com, https://orcid.org/0009-0002-8829-4885

Аннотация. В работе рассматривается оператор Дирака с суммируемым потенциалом на конечном интервале (a, b). Изучаются вопросы покомпонентной равносходимости ортогонального разложения с тригонометрическим рядом Фурье, и найдено достаточное условие для покомпонентной равносходимости на компакте основного интервала (a, b).

Ключевые слова: оператор Дирака, собственная вектор-функция, покомпонентная равносходимость, неравенство Рисса

Для цитирования: *Ибадов Э. Дж.* Теорема о покомпонентной равносходимости для оператора Дирака с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 1. С. 4–16. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16, EDN: DXTJFB

Article

Componentwise equiconvergence theorem for the Dirac operator with a summable potential

E. J. Ibadov

Azerbaijan State Pedagogical University, 68 Uzeir Hajibeyov St., Baku AZ1000, Azerbaijan

Elchin J. Ibadov, e.c_ibadov@ yahoo.com, https://orcid.org/0009-0002-8829-4885

Abstract. The article considers the Dirac operator with a summable potential on the finite interval (a, b). It studies the componentwise equiconvergence of the orthogonal decomposition with a trigonometric Fourier series and finds a sufficient condition for componentwise equiconvergence on the compact main interval (a, b).

Keywords: Dirac operator, eigenvector function, componentwise equiconvergence, Riss inequality

For citation: Ibadov E. J. Componentwise equiconvergence theorem for the Dirac operator with a summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-1-4-16, EDN: DXTJFB

1. Введение и формулировка результатов

Задача равносходимости спектрального разложения по системе собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с тригонометрическим рядом исследована В. А. Ильиным. В его работах [1, 2] собственные и присоединенные функции определяются как регулярные решения дифференциальных уравнений со спектральными параметрами, т. е. независимыми от граничных условий. Там же найдено необходимое и достаточное условие для равномерной равносходимости на компакте биортогонального разложения по системе собственных и присоединенных функций с тригонометрическим рядом дифференциального оператора произвольного порядка с гладкими коэффициентами.

В. М. Курбанов для дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами исследовал скорость равномерной равносходимости и равносходимость в метриках L_p, $1 \leqslant p < \infty$ на компакте [3, 4].

И. С. Ломов изучал скорость равносходимости в метриках L_p, $1 \leqslant p < \infty$ при определенных условиях на убывание биортогональных коэффициентов и на нормы собственных и присоединенных функций [5, 6].

Для оператора Шрёдингера с матричными коэффициентами равномерная равносходимость на компакте исследована в работе [7], а для дифференциальных операторов произвольного порядка в метриках L_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ скорость равносходимости на компакте — в [8], а также при $1 \leqslant p < \infty$ — в работах [9, 10].

Вопросы покомпонентной равномерной равносходимости на компакте и другие спектральные свойства оператора Дирака исследованы в работах [11–16].

Рассмотрим на конечном интервале $G = (a, b)$ оператор Дирака

$$Dy = B\frac{dy}{dx} + P(x)y, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T,$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P(x) = \operatorname{diag}(p_1(x), p_2(x))$ — действительнозначная матрица-функция и $p_i(x) \in L_1(G)$, $i = 1, 2$.

Пусть $L_p^2(G)$, $p \geqslant 1$ — пространство вектор-функций $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с нормой

$$\|f\|_{p,2,G} \equiv \|f\|_{p,2} = \left(\int\limits_G \left(|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма в $L_\infty^2(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_{\infty,2} = \sup_{\overline{G}} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Очевидно, что при $f(x) \in L_p^2(G)$, $g(x) \in L_q^2(G)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, существует

$$(f, g) = \int\limits_G \sum_{j=1}^{2} f_j(x)\overline{g_j(x)}dx.$$

Следуя работе [1], под собственной функцией оператора D, отвечающей действительному собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю вектор-функцию $y(x)$, которая абсолютно непрерывна на замкнутом интервале $\overline{G} = [a, b]$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $Dy = \lambda y$.

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная полная ортонормированная в $L_2^2(G)$ система собственных вектор-функций оператора D, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующая система собственных значений.

Для произвольной $f(x) \in L_p^2(G)$ $(p \geqslant 1)$ составим частичную сумму порядка ν ортогонального разложения по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\nu(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant \nu} (f, u_n) u_n(x), \quad x \in G.$$

Для каждого $j = 1, 2$ рассмотрим j-ю компоненту частичной суммы $\sigma_\nu(x, f)$:

$$\sigma_\nu^j(x, f) = \sum_{|\lambda_n| \leqslant \nu} (f, u_n) u_n^j(x), \quad x \in G,$$

и сравним $\sigma_\nu^j(x, f)$ с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье, соответствующей j-й компоненте $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$:

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi} \int\limits_G \frac{\sin \nu(x - y)}{x - y} f_j(y) dy.$$

Определение 1. Будем говорить, что *j-я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L_p^2(G)$ в ортогональный ряд по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равносходится в метрике L_s, $s \in [1, \infty]$ на любом компакте множества $G = (a, b)$ с разложением соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье*, если на любом компакте $K \subset G$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left\| \sigma_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j) \right\|_{L_s(K)} = 0. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть $f(x) \in L_p^2(G)$ $(p > 1)$, функции $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$ принадлежат классу $L_\alpha(G)$ $(\alpha \geqslant 1)$ и справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Тогда на любом компакте $K \subset G$ справедливо равенство (1), т. е. j-я компонента разложения вектор-функции $f(x) \in L_p^2(G)$ в ортогональной ряд по системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равносходится в метрике L_s, $s \in [1, \infty]$ на любом компакте множества $G = (a, b)$ с разложением соответствующей j-й компоненты $f_j(x)$ вектор-функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Замечание. При $s = \infty$ равенство (1) означает, что

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left\| \sigma_\nu^j(\cdot, f) - S_\nu(\cdot, f_j) \right\|_{C(K)} = 0.$$

Поэтому при $\alpha > 2$ имеем равномерную равносходимость на любом компакте $K \subset G$ (см. [11]).

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Определение 2. Будем говорить, что *для системы* $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *выполняется неравенство Рисса*, если существует такая постоянная $M = M(p)$, что для произвольной вектор-функции $f(x) \in L_p^2(G)$ $(1 < p \leqslant 2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^q \leqslant M \|f\|_{p,2}^q,$$

где $q = p/(p-1)$, $M(p)$ — константа, не зависящая от $f(x)$.

Для доказательства теоремы необходимы некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть функции* $p_i(x)$ $(i = 1, 2)$ *принадлежат классу* $L_1(G)$. *Тогда существуют такие постоянные* C_1 *и* C_2, *что справедливы неравенства*

$$\|u_n\|_{\infty,2} \leqslant C_1, \tag{2}$$

$$\sum_{|\mu-\lambda_n|\leqslant 1} \leqslant C_2, \tag{3}$$

где μ — *произвольное действительное число.*

Оценки (2) и (3) установлены соответственно в работах [15, 16].

Пусть

$$\Phi_n^1(r, R, \nu) = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \sin \lambda_n (t - r)\, dt,$$

$$\Phi_n^2(r, R, \nu) = \int_r^R \frac{\sin \nu t}{t} \cos \lambda_n (t - r)\, dt,$$

$$\frac{R_0}{2} \leqslant R \leqslant R_0, \quad R_0 > 0, \quad 0 < r < R < \infty, \quad \nu > 0, \quad n \in N,$$

$$\left\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\right\|_{p,[0,R]} \equiv \left\{ \int_0^R \left|\Phi_n^j(r, R, \nu)\right|^p dr \right\}^{1/p}.$$

Лемма 2. *Если* $\beta \in (0, 1]$, *то для интегралов* $\Phi_n^j(r, R, \nu)$ $(j = 1, 2;\ n \in N)$ *справедливы следующие оценки:*

$$|\Phi_n^j| \leqslant C(\beta) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-\beta} r^{-\beta}, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| \geqslant 1, \\ \max\{|\ln r|, |\ln R|\}, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma,[0,R]} \leqslant C(R_0) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-1/\gamma}, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| \geqslant 1, \gamma \in (1, \infty), \\ 1, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\|\Phi_n^j(\cdot, R, \nu)\|_{1,[0,R]} \leqslant C(R_0) \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{-1/\tau}, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| \geqslant 1,\ \tau > 1, \\ 1, & \textit{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим только случай $j = 2$, ибо при $j = 1$ доказательство оценки (4) проводится совершенно аналогично. Учитывая равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

для интеграла $\Phi_n^j(r,R,\nu)$ получим

$$\Phi_n^2(r,R,\nu) = \cos\lambda_n r \int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt + \sin\lambda_n r\int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\sin\lambda_n t\,dt =$$
$$= H_1(r,R,\nu,\lambda_n)\cos\lambda_n r + H_2(r,R,\nu,\lambda_n)\sin\lambda_n r. \tag{7}$$

Представим интеграл H_1 в следующем виде:

$$H_1 = \int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt = \int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\cos|\lambda_n|t\,dt = \int\limits_r^\infty - \int\limits_R^\infty =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_r^\infty \frac{\sin(\nu-|\lambda_n|)t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_r^\infty \frac{\sin(\nu+|\lambda_n|)t}{t}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_R^\infty \frac{\sin(\nu-|\lambda_n|)t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_R^\infty \frac{\sin(\nu+|\lambda_n|)t}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\nu-|\lambda_n|)\int\limits_{|\nu-|\lambda_n||r}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{(\nu+|\lambda_n|)r}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\nu-|\lambda_n|)\int\limits_{|\nu-|\lambda_n||R}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{(\nu+|\lambda_n|)R}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Применяя неравенство $|\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt| \leqslant C(\varepsilon)/x^\varepsilon$, $x>0$, $\varepsilon\in[0,1]$, получим

$$|H_1| \leqslant \frac{C_1(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{C_1(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta R^\beta} \leqslant \frac{C(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta}.$$

Аналогично для интеграла H_2 получим

$$H_2 = \operatorname{sign}\lambda_n \int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\sin|\lambda_n|t\,dt = \frac{\operatorname{sign}\lambda_n}{2}\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu-|\lambda_n|)t}{t}\,dt - \frac{\operatorname{sign}\lambda_n}{2}\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu+|\lambda_n|)t}{t}\,dt.$$

Интегрируя по частям $\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu-|\lambda_n|)t}{t}\,dt$ и применяя неравенство $|\sin x| \leqslant |x|^{1-\beta}$, $\beta\in[0,1]$, получим

$$\Big|\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu-|\lambda_n|)t}{t}\,dt\Big| = \Big|\frac{\sin(\nu-|\lambda_n|)t}{(\nu-|\lambda_n|)t}\Big|_r^R + \frac{1}{\nu-|\lambda_n|}\int\limits_r^R \frac{\sin(\nu+|\lambda_n|)t}{t^2}\,dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\nu-|\lambda_n||^\beta R^\beta} + \frac{1}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{1}{|\nu-|\lambda_n||^\beta}\int\limits_r^R \frac{dt}{t^{1+\beta}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta} + \frac{\beta^{-1}}{|\nu-|\lambda_n||^\beta}\Big(\frac{1}{r^\beta} - \frac{1}{R^\beta}\Big) \leqslant \frac{C_2(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta},$$

где $C_2(\beta) = 2(1+\beta^{-1})$, $\beta>0$.

Аналогично для интеграла $\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu+|\lambda_n|)t}{t}\,dt$ имеем оценку

$$\int\limits_r^R \frac{\cos(\nu+|\lambda_n|)t}{t}\,dt \leqslant \frac{C_2(\beta)}{|\nu+|\lambda_n||^\beta r^\beta}.$$

Следовательно, для интеграла H_2 справедлива оценка

$$|H_2| \leqslant \frac{C(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta}.$$

Учитывая эти оценки для интегралов H_1 и H_2, из равенства (7) получим

$$|\Phi_n^2(r,R,\nu)| \leqslant |H_1|+|H_2| \leqslant \frac{C(\beta)}{|\nu-|\lambda_n||^\beta r^\beta}.$$

Вторая часть оценки (4) следует из неравенства

$$\Big|\int\limits_r^R \frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n(t-r)\,dt\Big| \leqslant \int\limits_r^R \frac{dt}{t} \leqslant 2\max[|\ln r|,|\ln R|].$$

Теперь докажем оценку (5). Пусть число $R_0>0$ зафиксировано и справедливо неравенство $|\nu-|\lambda_n|| \geqslant \frac{2}{R_0} \geqslant 1$, тогда $|\nu-|\lambda_n||^{-1} \leqslant \frac{R_0}{2} \leqslant R$. Учитывая неравенство $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p)$, $a\geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $0\leqslant p<\infty$, для интеграла $\Phi_n^j(r,R,\nu)$ $(j=1,2)$ получим

$$\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[0,R]} \leqslant 2^{1/\gamma}\Big(\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[0,|\nu-|\lambda_n||^{-1}]}+\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[|\nu-|\lambda_n||^{-1},R]}\Big).$$

Для оценки $\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[0,|\nu-|\lambda_n||^{-1}]}$ применим (4) при $\beta\in(0,1)$, $\beta\gamma<1$, а для оценки $\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[|\nu-|\lambda_n||^{-1},R]}$ — (4) при $\beta=1$. В результае имеем:

$$\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[0,|\nu-|\lambda_n||^{-1}]} = O\Big(\Big(\int\limits_0^{|\nu-|\lambda_n||^{-1}} |\nu-|\lambda_n||^{-\beta\gamma}r^{-\beta\gamma}dr\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big) =$$

$$= O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-\beta}\Big)\cdot\Big(|\nu-|\lambda_n||^{\gamma\beta-1}\Big) = O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-1/\gamma}\Big);$$

$$\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[|\nu-|\lambda_n||^{-1},R]} = O\Big(\Big(\int\limits_{|\nu-|\lambda_n||^{-1}}^{R} |\nu-|\lambda_n||^{-\gamma}r^{-\gamma}dr\Big)^{\frac{1}{\gamma}}\Big) =$$

$$= O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-1}\Big)\cdot\Big(\int\limits_{|\nu-|\lambda_n||^{-1}} r^{-\gamma}dr\Big)^{1/\gamma} =$$

$$= O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-1}\Big)\cdot\Big[(R^{-1})^{\gamma-1}-|\nu-|\lambda_n||^{\gamma-1}\Big]^{1/\gamma} =$$

$$= O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-1}\Big)\cdot\Big(2|\nu-|\lambda_n||^{\gamma-1}\Big)^{1/\gamma} = O\Big(|\nu-|\lambda_n||^{-1/\gamma}\Big).$$

При $1\leqslant|\nu-|\lambda_n||<\frac{2}{R_0}$ в силу оценки (4) для $\beta=\beta_0<\frac{1}{\gamma}$ получим

$$\|\Phi_n^j(\cdot,R,\nu)\|_{\gamma,[0,R]} = \Big(|\nu-|\lambda_n||^{-\beta_0}\Big)\cdot\Big(\int\limits_0^R r^{-\beta_0\gamma}dr\Big)^{1/\gamma} =$$

$$= O\Big(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta_0}\Big) R_0^{\frac{1}{\gamma}-\beta_0} = O\Big(|\nu - |\lambda_n||^{-\beta_0}\Big) |\nu - |\lambda_n||^{\beta_0 - \frac{1}{\gamma}} = O\Big(|\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\gamma}}\Big).$$

При $|\nu - |\lambda_n|| < 1$ оценка (5) непосредственно следует из оценки (4), учитывая интегрируемость функции $|\ln r|^{\gamma}$.

Лемма 2 доказана. □

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_p^2(G)$, $p > 1$. Фиксируем произвольный связной компакт $K \subset G$ и число R, удовлетворяющее условию $0 < 2R < dist(K, \partial G)$.

Введем для каждой $x \in K$ функцию

$$\varphi(x, y, R, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y}, & \text{при } |x-y| \leqslant R, \\ 0, & \text{при } |x-y| > R, \end{cases} \tag{8}$$

где $y \in G$, $\nu > 0$.

Обозначим

$$W(x, y, R, \nu) = \operatorname{diag}(\varphi, \varphi), \quad W_n(x, R, \nu) = \int\limits_G W(x, y, R, \nu) u_n(y)\, dy. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L_p^2(G)$, $p > 1$ и для произвольной функции $f(x) \in L_p^2(G)$ выполняется оценка*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n \Big\|_{s,2,K} \leqslant C(\nu, K) \|f\|_{p,2}, \quad s \geqslant 1,$$

где $C(\nu, K)$ не зависит от $f(x)$.

Тогда в метрике $L_s^2(K)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n = \int\limits_G f(y) W\Big(|x-y|, R, \nu\Big) f(y)\, dy,$$

где $f_n = (f, u_n)$.

Доказательство леммы 3 полностью аналогично доказательству из [8, лемма 3].

3. Доказательство теоремы

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_p^2(G)$, $p > 1$. Фиксируем произвольный связной компакт $K \subset G$ и число R, удовлетворяющее условию $0 < 2R < dist(K, \partial G)$.

Учитывая (9) и (8), получим

$$W_n(x, R, \nu) = \int\limits_G W(x, y, R, \nu) u_n(y) dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-y| \leqslant R} \frac{\sin \nu(x-y)}{x-y} u_n(y) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \{u_n(x-t) + u_n(x+t)\}\, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^R \frac{\sin \nu t}{t} \cdot \frac{u_n(x-t) + u_n(x+t)}{2}\, dt.$$

В силу формулы среднего значения (см. [11])

$$\frac{u_n(x-t) + u_n(x+t)}{2} = u_n(x) \cos \lambda_n t +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \{\sin \lambda_n (t - |x-\xi|) I + \operatorname{sign}(\xi - x) \cos \lambda_n (t - |x-\xi|) B\} P(\xi) u_n(\xi) d\xi,$$

где I — единичная матрица в E^2, получаем

$$W_n(x,y,R,\nu)=\frac{2}{\pi}u_n(x)\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt+$$

$$+\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big\{\sin\lambda_n\Big(t-|x-\xi|\Big)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\cos\lambda_n\Big(t-|x-\xi|\Big)B\Big\}P(\xi)u_n(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}u_n(x)\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-R}^{x+R}\Big(\int\limits_{|x-\xi|}^{R}\frac{\sin\nu t}{t}\Big\{\sin\lambda_n\Big(t-|x-\xi|\Big)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\times$$

$$\times\cos\lambda_n\Big(t-|x-\xi|\Big)B\Big\}\,dt\Big)P(\xi)u_n(\xi)d\xi=\frac{2}{\pi}u_n(x)\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-R}^{x+R}\Big\{\Phi_n^1(|x-\xi|,R,\nu)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\Phi_n^2(|x-\xi|,R,\nu)B\Big\}P(\xi)u_n(\xi)d\xi.$$

Представим эту формулу в виде

$$W_n(x,R,\nu)=u_n(x)\delta(\nu,\lambda_n)+u_n(x)\Big\{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt-\delta(\nu,\lambda_n)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-R}^{x+R}\Big\{\Phi_n^1(|x-\xi|,R,\nu)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\Phi_n^2(|x-\xi|,R,\nu)B\Big\}P(\xi)u_n(\xi)d\xi=$$

$$=u_n(x)\delta(\nu,\lambda_n)+u_n(x)J(\nu,\lambda_n)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{x-R}^{x+R}\Big\{\Phi_n^1(|x-\xi|,R,\nu)I+\operatorname{sign}(\xi-x)\Phi_n^2(|x-\xi|,R,\nu)B\Big\}P(\xi)u_n(\xi)d\xi,\tag{10}$$

где

$$\delta(\nu,\lambda_n)=\begin{cases}1, & \text{при } \nu>\lambda_n,\\ \frac{1}{2}, & \text{при } \nu=\lambda_n,\\ 0, & \text{при } \nu<\lambda_n,\end{cases}\qquad J(\nu,\lambda_n)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\frac{\sin\nu t}{t}\cos\lambda_n t\,dt-\delta(\nu,\lambda_n).$$

Рассмотрим разность $\sum\limits_{n=1}^{\infty}W_nf_n-\sigma_\nu(x,f)$, где $f\in L_p^2(G)$ $(p>1)$ и $f_n=(f,u_n)$. Учитывая здесь формулу (10), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}W_nf_n-\sigma_\nu(x,f)=-\frac{1}{2}\sum_{|\lambda_n|=\nu}(f,u_n)u_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(f,u_n)u_n(x)J(\nu,\lambda_n)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(f,u_n)\int\limits_0^R\Big\{P(x+r)u_n(x+r)+P(x-r)u_n(x-r)\Big\}\Phi_n^1(r,R,\nu)dr+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(f,u_n)\int\limits_0^R\Big\{P(x+r)u_n(x+r)-P(x-r)u_n(x-r)\Big\}\Phi_n^2(r,R,\nu)dr=$$

$$= F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + F_4(x), \quad x \in K. \tag{11}$$

Оценим $\|F_i\|_{s,2,K}$, $i = \overline{1,4}$.

Используя оценки (2), (3) и неравенство Рисса, имеем

$$\|F_1\|_{s,2,K} = \frac{1}{2}\Big\| \sum_{|\lambda_n|=\nu} (f, u_n) u_n(\cdot) \Big\|_{s,2,K} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)| \|u_n\|_{s,2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)| \leqslant C \Big(\sum_{|\lambda_n|=\nu} |(f, u_n)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{|\lambda_n|=\nu} 1 \Big)^{1/p} \leqslant C\|f\|_{p,2}, \quad 1 < p \leqslant 2.$$

Применив оценки (2), (3), неравенство Рисса (см. [12]) и учитывая неравенство (см. [9])

$$|J(\nu, \lambda_n)| \leqslant \frac{C(R)}{1 + |\nu - |\lambda_n||},$$

имеем

$$\|F_2\|_{s,2,K} = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) u_n(\cdot) J(\nu, \lambda_n) \Big\|_{s,2,K} \leqslant C(R) \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| |J(\nu, \lambda_n)| \|u_n\|_{s,2,K} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \cdot |J(\nu, \lambda_n)| \leqslant C \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + ||\lambda_n| - \nu|)^p} \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{p,2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+n}\Big)^p \sum_{n \leqslant |\nu - |\lambda_n|| \leqslant n+1} 1 \Big)^{1/p} \leqslant C\|f\|_{p,2} \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{-p} \Big)^{1/p} \leqslant C\|f\|_{p,2}, \ 1 < p \leqslant 2.$$

Теперь оценим $\|F_3\|_{s,2,K}$. В силу оценки (2) имеем

$$|F_3(x)| = \frac{1}{\pi} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} (f, u_n) \int_0^R \{P(x+r) u_n(x+r) + P(x-r) u_n(x-r)\} \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \int_0^R \Big\{ \Big(|p_1(x+r) u_n^1(x+r)|^2 + |p_2(x+r) u_n^2(x+r)|^2 \Big)^{1/2} +$$

$$+ \Big(|p_1(x-r) u_n^1(x-r)|^2 + |p_2(x-r) u_n^2(x-r)|^2 \Big)^{1/2} \Big\} \Big| \Phi_n^1(r, R, \nu) \Big| dr \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} |(f, u_n)| \int_0^R Q(x, r) \Big| \Phi_n^1(r, R, \nu) \Big| dr, \tag{12}$$

где $Q(x, r) = |p_1(x+r)| + |p_1(x-r)| + |p_2(x-r)| + |p_2(x+r)|$.

В силу неравенства Юнга (см. [17]) для этих интегралов справедливы оценки

$$\|N^{\pm}\|_{s,K} = \Big\| \int_0^R p_1(\cdot \pm r) \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \Big\|_{s,K} \leqslant \|p_1\|_{\alpha} \|\Phi_n^1(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma,[0,R]},$$

$$\|M^{\pm}\|_{s,K} = \Big\| \int_0^R p_2(\cdot \pm r) \Phi_n^1(r, R, \nu) dr \Big\|_{s,K} \leqslant \|p_2\|_{\alpha} \|\Phi_n^1(\cdot, R, \nu)\|_{\gamma,[0,R]},$$

где $\gamma^{-1} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha}$ для $s > \alpha$, $\gamma = 1$ для $s \leqslant \alpha$.

Используя оценки (5) и (6), получаем

$$\Big\| N^{\pm} \Big\|_{s,K} \leqslant C(R) \|p_1\|_{\alpha} \begin{cases} |\nu - |\lambda_n||^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} - 1}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geqslant 1, \ s \geqslant \alpha \\ |\nu - |\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}}, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| \geqslant 1, \ s \leqslant \alpha, \\ 1, & \text{для } |\nu - |\lambda_n|| < 1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\left\|M^{\pm}\right\|_{s,K} \leqslant C(R)\|p_2\|_\alpha \begin{cases} |\nu-|\lambda_n||^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}-1}, & \text{для } |\nu-|\lambda_n|| \geqslant 1,\ s \geqslant \alpha \\ |\nu-|\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}}, & \text{для } |\nu-|\lambda_n|| \geqslant 1,\ s \leqslant \alpha, \\ 1, & \text{для } |\nu-|\lambda_n|| < 1. \end{cases} \tag{14}$$

Для $s > \alpha$ в силу оценки (13) и (14) из неравенства (12) следует

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}|(f,u_n)|\Big\|\int_0^R Q(x,r)|\Phi_n^1(r,R,\nu)|dr\Big\|_{s,2,K} \leqslant$$
$$\leqslant C\Big(\sum_{|\nu-\lambda_n|<1}|(f,u_n)|\Big\{\left\|N^+\right\|_{s,K}+\left\|N^-\right\|_{s,K}+\left\|M^+\right\|_{s,K}+\left\|M^-\right\|_{s,K}\Big\}+$$
$$+\sum_{|\nu-\lambda_n|\geqslant 1}|(f,u_n)|\Big\{\left\|N^+\right\|_{s,K}+\left\|N^-\right\|_{s,K}+\left\|M^+\right\|_{s,K}+\left\|M^-\right\|_{s,K}\Big\}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C(\|p_1\|_\alpha+\|p_2\|_\alpha)\Big\{\sum_{|\nu-\lambda_n|<1}|(f,u_n)|+\sum_{|\nu-\lambda_n|\geqslant 1}|(f,u_n)|\cdot|\nu-\lambda_n|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}-1}\Big\}.$$

Отсюда с помощью неравенства Рисса, неравенства $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}<\frac{1}{q}$ и (3) следует оценка

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leqslant C(\|p_1\|_\alpha+\|p_2\|_\alpha)\|f\|_{p,2}.$$

В случае $s \leqslant \alpha$, применяя оценки (14) с параметром $\tau > \frac{1}{p}$ и неравенство Рисса и учитывая (2), (3), имеем

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leqslant C(\|p_1\|_\alpha+\|p_2\|_\alpha)\Big\{\sum_{|\nu-|\lambda_n||<1}|(f,u_n)|+\sum_{|\nu-|\lambda_n||\geqslant 1}|(f,u_n)|\cdot|\nu-|\lambda_n||^{-\frac{1}{\tau}}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|p_1\|_\alpha+\|p_2\|_\alpha)\|f\|_{p,2}.$$

Следовательно, для $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}<\frac{1}{q}$ получим справедливость оценки

$$\|F_3\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\|f\|_{p,2}.$$

Аналогично устанавливается оценка для вектор-функции $F_4(x)$:

$$\|F_4\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\|f\|_{p,2}.$$

Следовательно, в силу полученных оценок для сумм $F_4(x)$, $k=\overline{1,4}$ из (11) следует, что для любой функции $f(x) \in L_p^2(G)$, $1<p\leqslant 2$ выполняется оценка

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}W_nf_n-\sigma_\nu(\cdot,f)\Big\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\|f\|_{p,2}, \tag{15}$$

где $f_n=(f,u_n)$.

Поскольку пространство $L_p^2(G)$ $(p>2)$ вложено в пространство $L_p^2(G)$ $(1<p\leqslant 2)$, то при условии $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}<\frac{1}{2}$ оценка (15) справедлива и в случае $f(x)\in L_p^2(G)$ $(p>2)$.

Таким образом, получаем, что при $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{s}<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{q}\right\}$ оценка (15) справедлива для произвольного $f(x)\in L_p^2(G)$ $(p>1)$.

С другой стороны, понятна справедливость оценки

$$\|\sigma_\nu(\cdot,f)\|_{s,2,K} \leqslant \sum_{|\lambda_n|\leqslant\nu}|(f,u_n)|\|u_n\|_{s,K} \leqslant C(K)\|f\|_{p,2}\sum_{|\lambda_n|\leqslant\nu}1 \leqslant C(K)\nu\|f\|_{p,2}.$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L_p^2(G)$, $p > 1$, имеет место оценка

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n \Big\|_{s,2,K} \leqslant \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} W_n f_n - \sigma_\nu(\cdot, f) \Big\|_{s,2,K} + \|\sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\nu\|f\|_{p,2}.$$

А это означает, что условие леммы 3 выполнено. Поэтому из неравенства (15) следует, что для любой вектор-функции $f \in L_p^2(G)$ $(p > 1)$ выполняется оценка

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\|f\|_{p,2}. \tag{16}$$

Из замкнутости системы $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_p^2(G)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $n_0(\varepsilon, f)$, что

$$\Big\| f - \sum_{n=1}^{n_0(\varepsilon,f)} (f, u_n) u_n(x) \Big\|_{p,2} < \frac{\varepsilon}{2C(K)}.$$

Обозначим $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{n_0(\varepsilon,f)} (f, u_n) u_n(x)$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} = \|S_\nu(\cdot, f - g) + S_\nu(\cdot, g) - \sigma_\nu(\cdot, f - g) - \sigma_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} \leqslant$$
$$\leqslant \|S_\nu(\cdot, f - g) - \sigma_\nu(\cdot, f - g)\|_{s,2,K} + \|\sigma_\nu(\cdot, g) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K}.$$

Отсюда в силу оценки (16) и равенства $\sigma_\nu(x, g) = g(x)$ для достаточно больших ν получим

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} \leqslant C(K)\|f - g\|_{p,2} + \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K}. \tag{17}$$

Поэтому следует доказать равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{s,2,K} = 0. \tag{18}$$

Из определения собственной функции $u_n(x)$ следует, что она принадлежит классу $W_\alpha^1(G)$ (см. [15]). Следовательно, функция $g(x)$ также принадлежит $W_\alpha^1(G)$. Если $s \leqslant 2$, то равенство (18) является следствием базисности тригонометрической системы $L_2(G)$. Если $s > 2$, то по условию $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{s} < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\}$ находим

$$\alpha > \frac{s}{s \cdot \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{q}\right\} + 1} > 1.$$

Это показывает, что функция $g(x)$ принадлежит $W_\alpha^1(G)$, $\alpha > 1$.

Следовательно, каждая компонента $g_i(x)$, $i = 1, 2$ вектор-функции $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому на любом фиксированном компакте $K \subset G$ справедливо равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \|g(\cdot) - S_\nu(\cdot, g)\|_{C(K)} = 0.$$

Таким образом, равенство (18) доказано.

Из неравенства (17) с учетом равенства (18) получим, что при $\nu \geqslant \nu_0$ (ν_0 — достаточно большое число) выполняется неравенство

$$\|S_\nu(\cdot, f) - \sigma_\nu(\cdot, f)\|_{s,2,K} < \varepsilon.$$

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771–794.
2. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980–1009.
3. *Курбанов В. М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1597–1609.
4. *Курбанов В. М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 3. С. 319–335.
5. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 5. С. 619–628.
6. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1066–1077.
7. *Ильин В. А.* Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862–1878.
8. *Курбанов В. М.* О скорости равносходимости спектральных разложений // Доклады академии наук. 1999. Т. 365, № 4. С. 444–449.
9. *Ломов И. С., Марков А. С.* Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557–563. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064113050026, EDN: PZVNNH
10. *Markov A. S.* Estimates for the equiconvergence rate of spectral expansions on an interval // Differential Equation. 2012. Vol. 48, iss 8. P. 1090–1102. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112080046
11. *Курбанов В. М., Исмайлова А. М.* Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 648–662. EDN: OXXWVV
12. *Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M.* On local uniform equiconvergence rate for the Dirac operator // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2020. Vol. 46, iss. 1. P. 16–31. DOI: https://doi.org/10.29228/proc.14
13. *Курбанов В. М.* О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 12. С. 1608–1617.
14. *Курбанов В. М., Исмайлова А. И.* Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 334–340. EDN: OPTGBT
15. *Курбанов В. М., Исмайлова А. И.* Двусторонние оценки для корневых вектор-функций оператора Дирака // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 487–497. EDN: OWXITX
16. *Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M.* Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operator and Matrices. 2018. Vol. 12, iss. 4. P. 943–954. DOI: https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-57
17. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральное представление функций и теоремы вложения. Москва : Наука, Физматлит, 1996. 479 с.

References

1. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for spatial decompositions to be bases and to be equiconvergent with a trigonometric series. I. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 15, iss. 5, pp. 771–794 (in Russian).
2. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for spatial decompositions to be bases and to be equiconvergent with a trigonometric series. II. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, iss. 6, pp. 980–1009 (in Russian).

3. Kurbanov V. M. Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators. I. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, iss. 12, pp. 1619–1633. EDN: XLCQMP
4. Kurbanov V. M. Equiconvergence of biorthogonal expansions in root functions of differential operators: II. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, iss. 3, pp. 358–376. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754456
5. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. I. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, iss. 5, pp. 621-–630. EDN: PJLLDF
6. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. II. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, iss. 8, pp. 1070–1081. EDN: PJLLML
7. Il'in V. A. Componentwise equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root vector functions of the Schrödinger operator with a matrix non-Hermitian potential, all elements of which are only summable. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1991, vol. 27, iss. 11, pp. 1307–1321.
8. Kurbanov V. M. On the equiconvergence rate of spectral expansions. *Doklady Mathematics*, 1999, vol. 59, iss. 2, pp. 252–257. EDN: LFPJEP
9. Lomov I. S., Markov A. S. Estimates of the local convergence rate of spectral expansions for even-order differential operators. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, iss. 5, pp. 529–535. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266113050017, EDN: RFJJVX
10. Markov A. S. Estimates for the equiconvergence rate of spectral expansions on an interval. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss 8, pp. 1090–1102. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112080046
11. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Componentwise uniform equiconvergence of expansions in root vector functions of the Dirac operator with the trigonometric expansion. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 5, pp. 655–669. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112050047, EDN: XMXYJD
12. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. On local uniform equiconvergence rate for the Dirac operator. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 2020, vol. 46, iss. 1, pp. 16–31. DOI: https://doi.org/10.29228/proc.14
13. Kurbanov V. M. On the Bessel property and the unconditional basis property of systems of root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, iss. 12, pp. 1601–1610.
14. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Riesz inequality for systems of root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 3, pp. 336–342. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112030044, EDN: PMYUQR
15. Kurbanov V. M., Ismailova A. I. Two-sided estimates for root vector functions of the Dirac operator. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, iss. 4, pp. 494–505. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266112040040, EDN: XMEOQF
16. Kurbanov V. M., Abdullayeva A. M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient. *Operator and Matrices*, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 943–954. DOI: https://doi.org/10.7153/oam-2018-12-57
17. Besov O. V., Ilyin V. P., Nikolsky S. M. *Integral'noe predstavlenie funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral representation of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1996. 479 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.06.2024
Принята к публикации / Accepted 01.09.2025
Опубликована / Published 02.03.2026