Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 434–441
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 434–441
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-434-441
Научная статья
УДК 519.85

О расстоянии между сильно и слабо выпуклыми множествами

С. И. Дудов, М. А. Осипцев✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической экономики, DudovSI@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0098-3652

Осипцев Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Osipcevm@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1051-0250

Аннотация. Рассматривается задача отыскания расстояния между непересекающимися сильно выпуклым и слабо выпуклым (в определении Ж.-Ф. Виаля) множествами конечномерного пространства. При изложении результатов используются три альтернативные формализации в виде экстремальных задач. Получены необходимые условия решения задачи, учитывающие константы сильной и слабой выпуклости множеств и их другие характеристики. Они, кроме условия стационарности, содержат оценки роста целевых функций в альтернативных формализациях задачи при удалении аргумента от точки решения. Эти оценки роста далее использованы для получения условий как глобального, так и локального решения. При этом условия локального решения сопровождаются указанием радиуса его окрестности. Приводятся примеры, говорящие о существенности условий в доказываемых теоремах, а также точности формул для радиусов окрестности локального решения.

Ключевые слова: сильно и слабо выпуклые множества и функции, нормальный конус множества, необходимые и достаточные условия решения, радиус локального решения

Для цитирования: *Дудов С. И., Осипцев М. А.* О расстоянии между сильно и слабо выпуклыми множествами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 434–441. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-434-441

Article

Distance between strongly and weakly convex sets

S. I. Dudov, M. A. Osiptsev✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Sergei I. Dudov, DudovSI@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0098-3652
Mikhail A. Osiptsev, Osipcevm@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1051-0250

Abstract. The problem of finding the distance between non-intersecting strongly convex and weakly convex (as defined by J.-F. Viall) sets of finite-dimensional space is considered. Three alternative formalizations in the form of extremal problems are used in presenting the results. We obtained the necessary conditions for the solution of the problem taking into account the constants of strong and weak convexity of the sets and their other characteristics. Besides the condition of stationarity, they contain estimates of the growth of the objective functions in alternative formalizations of the problem as the argument moves away from the solution point. These growth estimates are further used to obtain both global and local solution conditions. In this case, the conditions of the local solution are accompanied by the indication of the radius of its neighborhood. The examples that show the importance of the conditions in the theorems being proved are given, as well as the accuracy of the formulas for the radii of the neighborhood of the local solution.

Keywords: strongly and weakly convex sets and functions, normal cone of a set, necessary and sufficient conditions for a solution, radius of a local solution

For citation: Dudov S. I., Osiptsev M. A. Distance between strongly and weakly convex sets. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 434–441 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-434-441

1. Постановка задачи

В теоретических и прикладных исследованиях нередко требуется искать расстояние между двумя непересекающимися множествами. Это предполагает решение следующей экстремальной задачи.

Пусть C и D — некоторые непересекающиеся замкнутые множества из $\mathbb{R}^p$. Расстоянием между ними называется величина $\min\limits_{x\in D, y\in C} \|x-y\|$. Таким образом, чтобы ее найти, требуется решить задачу

$$f(x,y) \equiv \|x-y\| \to \min_{x\in D, y\in C}. \tag{1}$$

Если C и D — выпуклые множества, то она попадает в класс задач выпуклого программирования и для нее нетрудно сформулировать необходимое и достаточное условие решения, а также применять численные методы выпуклого программирования (см. например, [1, 2]).

В данной работе мы будем рассматривать задачу (1) для случая, когда C — сильно выпуклое, а D — слабо выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$. Наша цель — получить необходимые, а также достаточные условия решения, отражающие роль параметров сильной и слабой выпуклости и других характеристик этих множеств. Для этого будем использовать средства сильно и слабо выпуклого анализа (см., например, [3–6]). Нам полезно привести еще две альтернативные математические формализации данной задачи, а именно

$$\rho(x,C) \equiv \min_{y\in C} \|x-y\| \to \min_{x\in D}, \tag{2}$$

$$\rho(y,D) \equiv \min_{x\in D} \|x-y\| \to \min_{y\in C}. \tag{3}$$

Далее используем обозначения:

$\bar{A}$, $int\, A$ — соответственно замыкание и внутренность множества A;

$\|x\|$ — евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$;

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x-y\| \leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r;
$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$;
$N(x, A)$ — нормальный конус множества A в точке x (см. [3–5]);
$Arg \min\limits_{x\in D} f(x) = \{y \in D : f(y) = \min\limits_{x\in D} f(x)\}$;
$f'(x)$ — градиент функции $f(\cdot)$ в точке x.

2. Вспомогательные факты

Сначала напомним (см., например, [3–5]) определения сильно и слабо выпуклых множеств и функций, которые здесь используются, а также их некоторые свойства.

Пусть $r > 0$ и точки x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^p$ таковы, что $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2r$. Обозначим через $D_r(x_1, x_2)$ пересечение всех евклидовых шаров из $\mathbb{R}^p$ с радиусом r, содержащих точки x_1 и x_2.

Определение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется:

а) *сильно выпуклым с константой* r (r-сильно выпуклым), если с любой парой точек x_1 и x_2, таких что $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2r$, оно содержит и $D_r(x_1, x_2)$;

б) *слабо выпуклым с константой* r (r-слабо выпуклым), если для любой пары точек из A, таких что $\|x_1 - x_2\| < 2r$ и $x_1 \neq x_2$, пересечение $D_r(x_1, x_2) \cap A$ содержит еще хотя бы одну точку, отличную от x_1 и x_2.

Справедливы следующие критерии для сильно и слабо выпуклых множеств (см. [3–5], опорный принцип)

Предложение 1. *Пусть $r > 0$. Замкнутое множество A из $\mathbb{R}^p$ является r-сильно (слабо) выпуклым тогда и только тогда, когда для любых $x \in A$ и $w \in N(x, A)$ таких, что $\|w\| = 1$, справедливо включение*

$$A \subset B(x - rw, r) \quad (A \subset \mathbb{R}^p \setminus int\, B(x + rw, r)).$$

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ — открытое выпуклое множество и $\rho > 0$. Функция $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *сильно (слабо) выпуклой с константой* ρ (ρ-сильно (слабо) выпуклой) на множестве Ω, если функция $f(\cdot) - \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2$ $(f(\cdot) + \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2)$ — выпукла на Ω.

Известно следующее свойство сильно (слабо) выпуклых функций (см. [1, 3–5])

Предложение 2. *Если функция $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ является ρ-сильно (слабо) выпуклой на открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ и дифференцируема в точке $x_0 \in \Omega$, то для всех $x \in \Omega$ справедливо неравенство*

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle f'(x_0), x - x_0\rangle \underset{(-)}{+} \frac{\rho}{2}\|x - x_0\|^2.$$

Приведем еще одно свойство сильно и слабо выпуклых множеств

Предложение 3 (см. [6], лемма 4.4). *Пусть A является сильно (слабо) выпуклым множеством с константой $r > 0$ и для некоторых $v_0 \neq 0_p$ и $\delta \geqslant 0$ в точке $x_0 \in A$ выполняется включение $B(0_p, \delta) \subset v_0 + N(x_0, A)$. Тогда для всех $x \in A$ справедливо неравенство*

$$\langle v_0, x - x_0\rangle \geqslant \begin{cases} \delta\|x - x_0\|\sqrt{1 - \frac{\|x-x_0\|^2}{4r^2}} \underset{(-)}{+} \frac{\|x-x_0\|^2}{2r}\sqrt{\|v_0\|^2 - \delta^2}, \ \text{если } \|x - x_0\| < 2r, \\ -\|v\|\|x - x_0\|, \ \text{если } A \text{ — слабо выпуклое и } \|x - x_0\| \geqslant 2r. \end{cases}$$

3. Основные результаты

Везде далее считаем, что $r_C > 0$, $r_D > 0$, C — r_C-сильно выпуклое, а D — r_D-слабо выпуклое замкнутое множество и $C \cap D = \varnothing$.

3.1. Докажем вспомогательный факт.

Лемма 1. *Пусть точки $x_0 \in D$ и $y_0 \in C$ таковы, что*

$$x_0 - y_0 \in N(y_0, C) \bigcap -N(x_0, D). \tag{4}$$

1. Если при этом существует $\delta_D \geqslant 0$ такое, что

$$B(y_0 - x_0, \delta_D) \subset N(x_0, D), \tag{5}$$

то для всех $x \in D$ выполняется

$$(\rho(x, C) + r_C)^2 - (\rho(x_0, C) + r_C)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} 2\delta_D \left(1 + \frac{r_C}{\|x_0 - y_0\|}\right) \|x - x_0\| \sqrt{1 - \frac{\|x - x_0\|^2}{4r_D^2}} + \\ + \left(1 - \frac{\|x_0 - y_0\| + r_C}{r_D} \sqrt{1 - \frac{\delta_D^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}\right) \|x - x_0\|^2, \text{ если } \|x - x_0\| < 2r_D, \\ \|x - x_0\|^2 - 2(\|x_0 - y_0\| + r_C)\|x - x_0\|, \text{ если } \|x - x_0\| \geqslant 2r_D. \end{cases} \tag{6}$$

2. Если при этом $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\|$ и существует $\delta_C \geqslant 0$ такое, что

$$B(x_0 - y_0, \delta_C) \subset N(y_0, C), \tag{7}$$

то для всех $y \in C$ выполняется

$$(r_D - \rho(y_0, D))^2 - (r_D - \rho(y, D))^2 \geqslant 2\delta_C \left(\frac{r_D}{\|x_0 - y_0\|} - 1\right) \|y - y_0\| \sqrt{1 - \frac{\|y - y_0\|^2}{4r_C^2}} +$$
$$+ \left(\frac{r_D - \|x_0 - y_0\|}{r_C} \sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}} - 1\right) \|y - y_0\|^2. \tag{8}$$

Доказательство. 1. Поскольку C — r_C-сильно выпуклое множество и в силу (4) $x_0 - y_0 \in N(y_0, C)$, то, в соответствии с предложением 1, имеем

$$C \subset C_0 \equiv B(z_1, r_C), \quad z_1 = y_0 + \frac{r_C(y - x_0)}{\|y_0 - x_0\|}. \tag{9}$$

Отсюда для всех $x \in \mathbb{R}^p$ получаем

$$\rho(x, C) \geqslant \rho(x, C_0) \geqslant \|x - z_1\| - r_C,$$

$$\rho(x_0, C) = \rho(x_0, C_0) = \|x_0 - y_0\| = \|x_0 - z_1\| - r_C.$$

Таким образом, для всех $x \in \mathbb{R}^p$ имеем

$$(\rho(x, C) + r_C)^2 \geqslant \|x - z_1\|^2, \quad (\rho(x_0, C) + r_C)^2 = \|x_0 - z_1\|^2. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $f_1(x) = \|x - z_1\|^2$. Она всюду дифференцируема, причем

$$f_1'(x_0) = 2(x_0 - z_1) = 2\left(1 + \frac{r_C}{\|x_0 - y_0\|}\right)(x_0 - y_0). \tag{11}$$

А поскольку она сильно выпукла с константой $\rho = 2$, то, в соответствии с предложением 2, выполняется

$$f_1(x) - f_1(x_0) \geqslant \langle f_1'(x_0), x - x_0\rangle + \|x - x_0\|^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p. \tag{12}$$

Из (5) и (11) следует

$$B(0_p, \delta_1) \subset f_1'(x_0) + N(x_0, D), \qquad \delta_1 = 2\left(1 + \frac{r_C}{\|x_0 - y_0\|}\right)\delta_D.$$

Поэтому, используя предложение 3, для всех $x \in D$ получаем

$$\langle f_1'(x_0), x - x_0\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} \delta_1\|x - x_0\|\sqrt{1 - \frac{\|x-x_0\|^2}{4r_D^2}} - \frac{\|x-x_0\|^2}{2r_D}\sqrt{\|f_1'(x_0)\|^2 - \delta_1}, \text{ при } \|x - x_0\| < 2r_D, \\ -\|f_1'(x_0)\|\|x - x_0\|, \text{ при } \|x - x_0\| \geqslant 2r_D. \end{cases} \tag{13}$$

Из (10) для всех $x \in \mathbb{R}^p$ получаем

$$(\rho(x, C) + r_C)^2 - (\rho(x_0, C) + r_C)^2 \geqslant f_1(x) - f_1(x_0).$$

Отсюда, используя (12) и (13), получаем для всех $x \in D$ неравенство (6).

2. Доказательство п. 2) леммы проводится аналогично. Оно также использует предложение 1 для оценки множества D и слабую выпуклость функции $f_2(y) = -\|y - z_2\|^2$, где $z_2 = x_0 + r_D\frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. □

3.2. Приведем необходимые и достаточные условия решения задачи (1), вытекающие из леммы 1.

Теорема 1. *Пусть точки $x_0 \in D$ и $y_0 \in C$ таковы, что $\|x_0 - y_0\| = \min\limits_{x\in D, y\in C}\|x - y\|$. Тогда выполняется включение (4) и для всех $x \in D$ неравенство*

$$(\rho(x, C) + r_C)^2 - (\rho(x_0, C) + r_C)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} \left(1 - \frac{\|x_0-y_0\|+r_C}{r_D}\right)\|x - x_0\|^2, \textit{ при } \|x - x_0\| < r_D, \\ \|x - x_0\|^2 - 2\left(\|x_0 - y_0\| + r_C\right)\|x - x_0\|, \textit{ при } \|x - x_0\| \geqslant r_D. \end{cases} \tag{14}$$

Если при этом $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\|$, то для всех $y \in C$ выполняется

$$(r_D - \rho(y_0, D))^2 - (r_D - \rho(y, D))^2 \geqslant \left(\frac{r_D - \|x_0 - y_0\|}{r_C} - 1\right)\|y - y_0\|^2. \tag{15}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует

$$\rho(x_0, C) = \min_{x\in D}\rho(x, C) = \rho(y_0, D) = \min_{y\in C}\rho(y, D) = \|x_0 - y_0\|. \tag{16}$$

Таким образом, шар $B(x_0, \|x_0 - y_0\|)$ касается множества C в точке $y_0 \in C$, а шар $B(y_0, \|x_0 - y_0\|)$ касается множества D в точке $x_0 \in D$. Отсюда и следует выполнение включения (4). Неравенства (14) и (15) следуют из леммы 1 при $\delta_D = \delta_C = 0$. □

Замечание 1. Примеры показывают, что правые части неравенств (14) и (15) могут принимать отрицательные значения, несмотря на условия теоремы.

Теорема 2. *Если точки $x_0 \in D$ и $y_0 \in C$ таковы, что $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\| + r_C$ и для некоторых $\delta_D \geqslant 0$, $\delta_C \geqslant 0$ выполняются включения*

$$B(x_0 - y_0, \delta_C) \subset N(y_0, C), \quad B(y_0 - x_0, \delta_D) \subset N(x_0, D), \tag{17}$$

то $\|x_0 - y_0\| = \min\limits_{x \in D, y \in C} \|x - y\|$ и для всех $x \in D$ выполняется неравенство (6), а для всех $y \in C$ выполняется неравенство (8).

Доказательство. Так как D — r_D-слабо выпуклое множество, то в силу (17), в соответствии с предложением 1, имеем

$$D \subset \mathbb{R}^p \setminus int\, B(z_2, r_D), \quad z_2 = x_0 + \frac{r_D(y_0 - x_0)}{\|y_0 - x_0\|}. \tag{18}$$

Включения (17), в соответствии с предложением 1, дают шаровые оценки (9) и (18) для множеств C и D, из которых с учетом $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\| + r_C$ следует (16). Это и дает $\|x_0 - y_0\| = \min\limits_{x \in D, y \in C} \|x - y\|$, а также, по лемме 1, неравенство (6) для $x \in D$ и (8) для $y \in C$. □

Замечание 2. Неравенство $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\| + r_C$ обеспечивает неотрицательность правых частей неравенств (6) и (8). При $\delta_D = 0$ и $\delta_C = 0$ они растут как $\alpha\|x - x_0\|^2$ и $\beta\|y - y_0\|^2$ при удалении x от x_0 и y от y_0 для некоторых $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. При $\delta_D > 0$ и $\delta_C > 0$ они локально растут сильнее, чем $\gamma\|x - x_0\|$ и $\theta\|y - y_0\|$ для некоторых $\gamma \geqslant 0$ и $\theta \geqslant 0$.

Теорема 3. *Пусть точки $x_0 \in D$ и $y_0 \in C$ таковы, что выполняется включение (4) и для некоторого $\delta_C > 0$ включение (7). Если при этом $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\| + r_C\sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}$, то $y_0 \in Arg\min\limits_{y \in C} \rho(y, D)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из включений (4) и (7), а также вытекающих из них, в соответствии с предложением 1, включения (18) и $C \subset \bigcap\limits_{\substack{w \in N(y_0, C),\\ \|w\| = 1}} B(y_0 - r_C w, r_C)$.

С другой стороны, поскольку выполненны соответствующие условия леммы 1, справедливость утверждения можно доказать, исследуя правую часть неравенства включения (8) на знак. □

3.3. Теперь приведем условия локального решения задач (2) и (3).

Теорема 4. *Пусть точки $x_0 \in D$ и $y_0 \in C$ таковы, что выполняется включение (4) и для некоторого $\delta_D > 0$ включение (5). Если при этом $0 < r_D < r_C + \|x_0 - y_0\|$, то $Arg \min\limits_{x \in D \cap B(x_0, \lambda(\delta_D))} \rho(x, C) = \{x_0\}$, где*

$$\lambda(\delta_D) = \begin{cases} 2r_D, \quad \text{если } (\|x_0 - y_0\| + r_C)\sqrt{1 - \frac{\delta_D^2}{\|x_0 - y_0\|^2}} \leqslant r_D < \|x_0 - y_0\| + r_C, \\ \dfrac{2r_D(\|x_0 - y_0\| + r_C)\delta_D}{\sqrt{(\|x_0 - y_0\| + r_C)^2\delta_D^2 + \left((\|x_0 - y_0\| + r_C)\sqrt{\|x_0 - y_0\|^2 - \delta_D^2} - \|x_0 - y_0\| r_D\right)^2}}, \\ \text{если } r_D < (\|x_0 - y_0\| + r_C)\sqrt{1 - \frac{\delta_D^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 1 получаем неравенство (6). Далее остается исследовать знак правой части. □

Также с помощью леммы 1 и исследования на знак правой части неравенства (8) доказывается

Теорема 5. *Пусть точки* $x_0 \in D$ *и* $y_0 \in C$ *таковы, что выполняется включение* (4) *и для некоторого* $\delta_C > 0$ *включение* (7). *Если при этом*

$$\|x_0 - y_0\| \leqslant r_D < \|x_0 - y_0\| + r_C\sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}},$$

то $Arg \min\limits_{y \in C \cap B(y_0, \lambda(\delta_C))} \rho(y, D) = \{y_0\}$, *где*

$$\lambda(\delta_C) = \frac{2r_C(r_D - \|x_0 - y_0\|)\delta_C}{\sqrt{(r_D - \|x_0 - y_0\|)^2\delta_C^2 + \left(r_C\|x_0 - y_0\| - (r_D - \|x_0 - y_0\|)\sqrt{\|x_0 - y_0\|^2 - \delta_C^2}\right)^2}}.$$

3.4. В заключение рассмотрим примеры, говорящие о точности полученных результатов.

Пример 1. Пусть размерность пространства $p = 2$, точки x_0 и y_0 из $\mathbb{R}^2$ выбираем произвольно, а также $r_C > 0$, $r_D \geqslant \|x_0 - y_0\|$ и $0 < \delta_C < \|x_0 - y_0\|$. В качестве множеств D и C возьмем

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus int\, B(z_2, r_D), \quad C = B(z_3, r_C) \bigcap B(z_4, r_C),$$

где

$$z_2 = x_0 + r_D\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}, \quad z_3 = y_0 + r_C\left(\sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}\frac{y_0 - x_0}{\|x_0 - y_0\|} + \frac{\delta_C}{\|x_0 - y_0\|}\frac{a}{\|a\|}\right),$$
$$z_4 = z_3 - 2r_C\frac{\delta_C}{\|x_0 - y_0\|}\frac{a}{\|a\|},$$

а вектор a перпендикулярен к вектору $x_0 - y_0$.

Очевидно, C — r_C-сильно, D — r_D-слабо выпуклые множества, при этом

$$N(x_0, C) = \left\{w \in \mathbb{R}^2 : \langle w, x - x_0\rangle \geqslant \|w\|\|x_0 - y_0\|\sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}\right\},$$
$$B(x_0 - y_0, \delta_C) \subset N(x_0, C).$$

На этом примере нетрудно убедиться в существенности требования

$$r_D \geqslant \|x_0 - y_0\| + r_C\sqrt{1 - \frac{\delta_C^2}{\|x_0 - y_0\|^2}}$$

теоремы 3, а также точности радиуса локального решения задачи (3), указанного в теореме 5.

Пример 2. Пусть $p = 2$, точки x_0 и y_0 из $\mathbb{R}^2$ выбираются произвольно, а также $r_C > 0$, $r_D > 0$ и $0 < \delta_D < \|x_0 - y_0\|$. Определим конус

$$K = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : \langle w, x_0 - y_0 \rangle \geqslant \|w\| \|x_0 - y_0\| \sqrt{1 - \frac{\delta_D^2}{\|x_0 - y_0\|^2}} \right\}$$

и множества

$$C = B(z_1, r_C), \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\substack{w \in K \\ \|w\|=1}} int\, B(x_0 + r_D w, r_D), \quad z_1 = y_0 + r_C \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}.$$

Нетрудно видеть, что C — r_C-сильно, а D — r_D-слабо выпуклые множества и при этом $N(x_0, D) = K$, $B(y_0 - x_0, \delta_D) \subset N(x_0, D)$. На этом примере мы можем убедиться в точности радиуса локального решения задачи (2), указанного в теореме 4.

Список литературы

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. Москва : МЦНМО, 2011. 624 с.
2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. Москва : Наука, 1981. 384 с.
3. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of set and funtions // Mathematics of Operations Research. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.
4. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Москва : Физматлит, 2007. 440 с.
5. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. Москва : Физматлит, 2006. 352 с.
6. *Дудов С. И., Осипцев М. А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Математический сборник. 2021. Т. 212, вып. 6. С. 43–72. https://doi.org/10.4213/sm9431

References

1. Vasiliev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, MCCME, 2011. 624 p. (in Russian).
2. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. Nondifferentiable Optimization. New York, Springer-Verlag, 1985. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1981. 384 p.).
3. Vial J.-P. Strong and weak convexity of set and funtions. *Mathematics of Operations Research*, 1983, vol. 8, no. 2, pp. 231–259.
4. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of Convex and Strongly Convex Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 440 p. (in Russian).
5. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funktsii* [Weakly Convex Sets and Functions]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 352 p. (in Russian).
6. Dudov S. I., Osiptsev M. A. Characterization of solutions of strong-weak convex programming problems. *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, iss. 6, pp. 782–809. https://doi.org/10.1070/SM9431

Поступила в редакцию / Received 23.08.2021
Принята к публикации / Accepted 15.09.2021
Опубликована / Published 30.11.2021