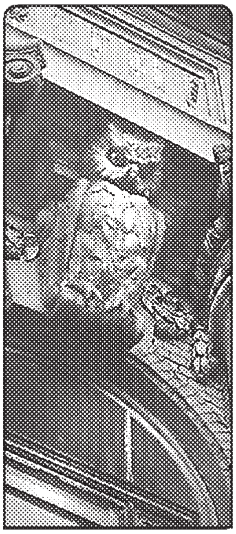

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14

Научная статья
УДК 517.98
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14

Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций

И. А. Высоцкая[1✉], **И. И. Струкова**[2]

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, д. 54А

[2]Воронежский государственный университет, Россия, 394036, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1

Высоцкая Ирина Алевтиновна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики, i.a.trishina@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6521-9570

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, irina.k.post@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2355-0091

Аннотация. Статья посвящена исследованию непрерывных почти периодических на бесконечности функций, заданных на всей вещественной оси и со значениями в комплексном банаховом пространстве. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Вводятся понятия медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения. Первое определение (аппроксимационное) основано на аппроксимационной теореме. В классическом варианте, для почти периодических функций, это равномерные замыкания тригонометрических многочленов. В нашем случае коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции. Второе определение, являющееся аналогом определения Г. Бора почти периодической функции, основывается на понятии ε-периода. Третье оп-

© Высоцкая И. А., Струкова И. И., 2021

ределение соответствует критерию С. Бохнера почти периодичности функций. Четвертое определение приводится в терминах фактор-пространства. Благодаря использованию результатов теории почти периодических векторов в банаховых модулях доказывается, что все четыре определения эквивалентны. Кроме того, доказано, что введенные пространства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно различных подпространств исчезающих на бесконечности функций совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций соответственно. Целесообразность рассмотрения почти периодических на бесконечности функций обусловлена тем, что решения некоторых важных классов дифференциальных и разностных уравнений являются почти периодическими на бесконечности. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения с правой частью из различных подпространств исчезающих на бесконечности функций. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений классу почти периодических на бесконечности функций, и изучено асимптотическое представление решений.

Ключевые слова: почти периодические на бесконечности функции, медленно меняющиеся на бесконечности функции, дифференциальные уравнения

Благодарности: Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732 А).

Для цитирования: *Высоцкая И. А., Струкова И. И.* Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14

The research of some classes of almost periodic at infinity functions

I. A. Vysotskaya[1]✉, I. I. Strukova[2]

[1]Federal State Official Military Educational Institution of Higher Education “Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, 56A Starih Bolshevikov St., Voronezh 394064, Russia
[2]Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia

Irina A. Vysotskaya, i.a.trishina@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6521-9570
Irina I. Strukova, irina.k.post@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2355-0091

Abstract. The article under consideration is devoted to continuous almost periodic at infinity functions defined on the whole real axis and with their values in a complex Banach space. We consider different subspaces of functions vanishing at infinity, not necessarily tending to zero at infinity. We introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to these subspaces. For almost periodic at infinity functions (with respect to a subspace) we give four different definitions. The first definition (approximating) is based on the approximation theorem. In the classical version, for almost periodic functions, they are represented as uniform closures of trigonometric polynomials. In our case, the Fourier coefficients are slowly varying at infinity functions. The second definition, which is an analogue

of G. Bohr's definition of an almost periodic function, is based on the concept of an ε-period. The third definition meets S. Bochner's criterion for the almost periodicity of functions. The fourth definition is given in terms of factor space. With the help of the results of the theory of almost periodic vectors in Banach modules those four definitions are proved to be equivalent. In addition, it was proved that the introduced spaces of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to different subspaces of functions vanishing at infinity coincide with the spaces of ordinary slowly varying and almost periodic at infinity functions, respectively. The feasibility of consideration of these functions is due to the fact that the solutions of some important classes of differential and difference equations are almost periodic at infinity. We consider differential equations whose right-hand side is a function vanishing at infinity and obtain necessary and sufficient conditions for their bounded solutions to be almost periodic at infinity functions. We also study an asymptotic representation of the solutions.
Keywords: almost periodic at infinity functions, slowly varying at infinity functions, differential equations

Acknowledgements: The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732 A).

For citation: Vysotskaya I. A., Strukova I. I. The research of some classes of almost periodic at infinity functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

1. ПРОСТРАНСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ И ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\,X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Рассматривается банахово пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0\}$ — подпространство исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$.

В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R} \to End\,C_b(\mathbb{R}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов эквивалентности) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_1(t - s)f_2(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Символом $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

В данной статье используется следующая теорема Винера (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{I}$ — идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Он совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$, если функции $\widehat{\varphi}$, $\varphi \in \mathscr{I}$, разделяют точки из $\mathbb{R}$, т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $\varphi \in \mathscr{I}$ такая, что $\widehat{\varphi}(\lambda_1) \neq \widehat{\varphi}(\lambda_2)$.*

Рассмотрим множество функций $\{f_\alpha,\, \alpha > 0\}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Их преобразования Фурье имеют вид $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, поэтому они разделяют точки из $\mathbb{R}$, т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ справедливо условие $\widehat{f}_\alpha(\lambda_1) \neq \widehat{f}_\alpha(\lambda_2)$. Тогда из теоремы 1 следует, что наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество $M_\alpha = \{f_\alpha\}$, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

Наряду с $C_0(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ вида $\mathscr{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)\}$. Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности*.

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{R}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$).

Пример 1. Следующие функции принадлежат пространству $\mathscr{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$:
1) $x_1(t) = e^{it^2}$;
2) $x_2(t) = \sin at^2$;
3) $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Выберем произвольное $\alpha > 0$ и покажем, что $x_1 \in \mathscr{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$. Действительно, $(f_\alpha * x_1)(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau$.

Вычислим последний интеграл отдельно:

$$\int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \int\limits_{-\frac{i\alpha}{2}}^{0} e^{i\tau^2} d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, erf\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

где символом erf обозначена функция ошибок, задаваемая формулой

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\tau^2} d\tau, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда получаем, что

$$(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, erf\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right),\ t \in \mathbb{R},$$

т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Определение 1. Далее символом $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из C_b) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:
1) $S(t)x \in \mathscr{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathscr{C}_0$;
2) $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathscr{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, $\alpha > 0$;
3) $e_\lambda x \in \mathscr{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций*.

Примером одного из таких подпространств является определенное ниже подпространство $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ [2,3] функций, интегрально исчезающих на бесконечности.

Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

В [2] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условию $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset$ $\subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В [4,5] изучались свойства непрерывных периодических на бесконечности функций.

Сформулируем определение медленно меняющейся на бесконечности функции, которое использовалось в работах [4,6–9].

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь приведем определение функции, медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего всем условиям определения 1.

Определение 3. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если $S(t)x - x \in$ $\in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0)$. Непосредственно из определения следует, что любое пространство $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0)$ является замкнутым подпространством в $C_b(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся на бесконечности функций изучались в работах [8–10].

Далее нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Ограниченная последовательность $(e_n,\, n \geqslant 1)$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей* (о.а.е.) алгебры $L^1(\mathbb{R})$ (см. [11]), если $\widehat{e}_n(0) = 1$ для всех $n \geqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} e_n * f = f$ для всех f из $L^1(\mathbb{R})$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 1. Тогда $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\alpha > 0$. Достаточно доказать равенство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_{0,\alpha}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Включение $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_{0,\alpha})$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_{0,\alpha})$, тогда $\psi = S(t)x - x \in \mathscr{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, т.е. $f_\alpha * \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$, где функция f_α имеет вид (1). Пусть $(e_n,\, n \geqslant 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из теоремы 1 следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(t)x - x) = S(t)(e_n * x) - (e_n * x) \in C_0(\mathbb{R}, X), \quad n \geqslant 1,$$

откуда получаем, что $y = e_n * x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, а значит, и $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. □

2. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$

Сформулируем определение обычной почти периодической на бесконечности функции (см. [2]).

Определение 5. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ и функции $x_1,\dots,x_N$ из $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$ такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R},X)$. Почти периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R},X)$) впервые были введены в рассмотрение в статьях [6, 7]. В [2] изучались почти периодические на бесконечности функции относительно подпространств $C_0(\mathbb{R},X) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R},X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Для $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X) = C_0(\mathbb{R},X)$ определение 5 совпадает с определением 10 из [2].

На основании определения 5 строится определение почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, удовлетворяющего определению 1.

Определение 6. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ и функции $x_1,\dots,x_N$ из пространства $\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$ такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$. Непосредственно из определения 3 следует, что если $\Omega_\infty(x;\mathscr{C}_0;\varepsilon) = \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$. Таким образом, имеет место включение

$$\mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0) \subset AP_\infty(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0).$$

Приведем еще три определения функций из $AP_\infty(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$ и покажем их эквивалентность.

Определение 7. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется *ε-периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, если существует функция $x_0 \in \mathscr{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Множество ε-периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(x;\mathscr{C}_0;\varepsilon)$. Если $\mathscr{C}_0 = C_0(\mathbb{R},X)$, то определение 7 эквивалентно определению ε-периода из статьи [7].

Определение 8. Множество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным* на $\mathbb{R}$, если существует такое $l > 0$, что $[t,t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Определение 9. Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x;\mathscr{C}_0;\varepsilon)$ ее ε-периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Определение 10. Множество функций $M \subset C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $b_1,\dots,b_N$ (ε-сеть на бесконечности) из M таких, что для любой функции $x \in M$ существуют функции b_k, $k \in \{1,\dots,N\}$, и $\alpha_\varepsilon \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, для которых имеет место оценка $\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Определение 11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, является предкомпактным на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$.

Заметим, что функции вида $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $x_1,\dots,x_N \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$(обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 11.

Определение 12. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathscr{C}_0(\mathbb{R},X) \in \mathscr{X}$ является почти периодическим вектором в $\mathscr{X}$ относительно изометрического представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathscr{X}$.

Теорема 3. *Все определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ *(определения 6, 9, 11, 12) эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R},X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\,\mathscr{X}$. Для этого представления определение 6 соответствует свойству 4) из определения почти периодического вектора (определение 14 из [2]). Поскольку все свойства из определения 14 из [2] эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 9, 11 и 6 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ и $\widetilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathscr{X}$, построенный по функции x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x;\mathscr{C}_0;\varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x;\mathscr{C}_0;\varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\widetilde{x},\varepsilon)$ ε-периодов класса $\widetilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 11 и свойства 2) определения 14 из [2] непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R},X)/\mathscr{C}_0(\mathbb{R},X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 6 и свойства 3) из определения 14 из [2]. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга [11–13] $\Lambda(\widetilde{y})$ класса эквивалентности $\widetilde{y} \in \mathscr{X}$, $\widetilde{y} = y + \mathscr{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X;\mathscr{C}_0)$.

Если $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство 4 из леммы 3 в [2]). Следовательно, $\Lambda(\widetilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому

$\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $y_0 \in \mathscr{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0)$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства 4 из леммы 3 в [2] получим, что $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$. □

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 1. Тогда $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0) = AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. В силу эквивалентности всех четырех определений почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для доказательства можно взять любое из них. Пусть функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ удовлетворяет определению 6, т.е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathscr{C}_0)$. Тогда в силу теоремы 2 она удовлетворяет и определению 5, т.е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. □

3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(t), t \in \mathbb{R},\ \psi \in C_b(\mathbb{R}, X). \tag{2}$$

Теорема 5. *Пусть функция ψ из уравнения (2) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$ и для спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in End\, X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1 ..., i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, ..., i\lambda_N$ — полупростые собственные значения оператора A. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (2) принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} y_k(t)e^{i\lambda_k t} + z_0(t), t \in \mathbb{R},\ y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X),\ 0 \leqslant k \leqslant N,\ z_0 \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Доказательство. Спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in End\, X$ представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_- \cup \sigma_+,$$

где σ_- — совокупность собственных значений оператора A, лежащих в левой полуплоскости, σ_+ — в правой полуплоскости, σ_0 — на мнимой оси. Исходя из такого разбиения спектра, рассмотрим проекторы $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_-$, $\mathscr{P}_+$, которые построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_-, \sigma_+$ соответственно. Следовательно, $I = \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_- + \mathscr{P}_+$. Эти проекторы индуцируют разложение пространства X в прямую сумму $X = X_0 \oplus X_- \oplus X_+$, где $X_0 = \operatorname{Im} \mathscr{P}_0$, $X_- = \operatorname{Im} \mathscr{P}_-$, $X_+ = \operatorname{Im} \mathscr{P}_+$.

Решение $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ представимо в виде $x(t) = x_-(t) + x_+(t) + x_0(t), t \in \mathbb{R}$, где $x_-(t) = \mathscr{P}_- x(t)$, $x_+(t) = \mathscr{P}_+ x(t)$, $x_0(t) = \mathscr{P}_0 x(t), t \in \mathbb{R}$.

Применяя проекторы $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_-$, $\mathscr{P}_+$ к уравнению (2), получим следующие равенства:

$$\dot{x}_-(t) = A_- x_-(t) + \psi_-(t), t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\dot{x}_+(t) = A_+ x_+(t) + \psi_+(t), t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + \psi_0(t), t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $A_- = A \mid X_-$, $A_+ = A \mid X_+$, $A_0 = A \mid X_0$ — сужения оператора A на подпространства X_-, X_+, X_0 соответственно. Отметим, что $\sigma(A_-) = \sigma_-$, $\sigma(A_+) = \sigma_+$, $\sigma(A_0) = \{i\lambda_0, \ldots, i\lambda_N\}$.

Ввиду равенств (3), (4) функция x_- представима в виде $x_- = G_- * x$, где

$$G_-(t) = \begin{cases} e^{A_- t} & , t \geqslant 0, \\ 0 & , t < 0. \end{cases}$$

Аналогично $x_+ = G_+ * x$, где

$$G_+(t) = \begin{cases} 0 & , t \geqslant 0, \\ -e^{A_+ t} & , t < 0. \end{cases}$$

Отметим, что функции $G_-, G_+ : \mathbb{R} \to End\, X$ принадлежат алгебре $L^1(\mathbb{R}, End\, X)$.

Поскольку ψ_- и ψ_+ принадлежат $C_0(\mathbb{R}, X)$, то их свертка с любой суммируемой операторнозначной функцией принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_-, x_+ \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим уравнение (5). Проектор $\mathscr{P}_0$ представим в виде $\mathscr{P}_0 = P_1 + P_2 + \cdots + P_N$, где каждый из операторов P_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, является спектральным проектором, построенным по спектральному множеству $\{i\lambda_k\}$, и выполняется условие $AP_k = i\lambda_k P_k$, $0 \leqslant k \leqslant N$.

Рассмотрим ограниченные функции $x_k = P_k x_0$, $0 \leqslant k \leqslant N$, и систему равенств $\dot{x}_k(t) = i\lambda_k x_k(t) + \psi_k(t)$, $0 \leqslant k \leqslant N$, где $\psi_k = P_k \psi_0$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $\psi_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Положим $y_k(t) = x_k(t) e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\dot{y}_k(t) = \dot{x}_k(t) e^{-i\lambda_k t} - i\lambda_k x_k(t) e^{-i\lambda_k t} = (\dot{x}_k(t) - i\lambda_k x_k(t)) e^{-i\lambda_k t} = \psi_k(t) e^{-i\lambda_k t}$. Непосредственно из определения пространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ получаем, что функция $t \mapsto \psi_k(t) e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, также принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$. А поскольку $\dot{y}_k \in C_0(\mathbb{R}, X)$, то $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Следовательно, решение x уравнения (2) представимо в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} y_k(t) e^{i\lambda_k t} + z_0(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $z_0 = x_- + x_+ \in C_0(\mathbb{R}, X)$. □

Теорема 6. *Пусть функция ψ из уравнения (2) принадлежит пространству $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющему всем условиям определения 1, и для спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in End\, X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1 \ldots, i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, \ldots, i\lambda_N$ — полупростые собственные значения оператора A. Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ дифференциального уравнения (2) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} y_k(t) e^{i\lambda_k t} + z_0(t), t \in \mathbb{R}$, где $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $z_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.*

Доказательство. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (2) с функцией $\psi \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда функция x удовлетворяет уравнению

$$f_\alpha * \dot{x} = A(f_\alpha * x) + f_\alpha * \psi,$$

где функция $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ задается формулой (1). Учитывая, что функция $\varphi = f_\alpha * \psi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$ (см. пример 1), получаем, что функция $y = f_\alpha * x$ удовлетворяет условиям теоремы 5, а значит, принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. Тогда из теоремы 1 следует, что $e_n * x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, $n \geqslant 1$, где $(e_n, n \geqslant 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. А значит, $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. □

Список литературы

1. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца // Успехи математических наук. 1946. Т. 1, № 2 (12). С. 48–146.
2. *Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А.* Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 2. С. 293–308. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.205
3. *Тришина И. А.* Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 402–418. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418
4. *Струкова И. И.* О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198. https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.114.
5. *Baskakov A., Strukova I.* Harmonic analysis of functions periodic at infinity // Eurasian Mathematical Journal. 2016. Vol. 7, № 4. P. 9–29.
6. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. 2013. Т. 68, № 1 (409). С. 77–128. https://doi.org/10.4213/rm9505
7. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. https://doi.org/10.4213/mzm10285
8. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. https://doi.org/10.4213/mzm8963
9. *Струкова И. И.* О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-28-38.
10. *Тришина И. А.* Медленно меняющиеся на бесконечности функции // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. 2017. № 4. С. 134–144.
11. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. https://doi.org/10.4213/im639
12. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151.
13. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces // Mediterranean Journal of Mathematics. 2016. Vol. 13, № 5. P. 2443–2462. https://doi.org/10.1007/s00009-015-0633-0

References

1. Gelfand I. M., Raikov D. A., Shilov G. E. Commutative normed rings. *Uspehi Matem. Nauk (N. S.)*, 1946, vol. 1, no. 2 (12), pp. 48–146 (in Russian).
2. Baskakov A. G., Strukova I. I., Trishina I. A. Solutions Almost Periodic at Infinity to Differential Equations With Unbounded Operator Coefficients. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, iss. 2, pp. 231–242. https://doi.org/10.1134/S0037446618020052

3. Trishina I. A. Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 402–418 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-402-418
4. Strukova I. I. On Wiener's Theorem for functions periodic at infinity. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 145–154. https://doi.org/10.1134/S0037446616010146
5. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Mathematical Journal*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.
6. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys,* 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. https://doi.org/10.1070/RM2013v068n01ABEH004822
7. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. https://doi.org/10.1134/S0001434615010198
8. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 587–605. https://doi.org/10.1134/S0001434612110016
9. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-28-38.
10. Trishina I. A. Functions slowly varying at infinity. *Proceeding of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, vol. 4, pp. 134–144 (in Russian).
11. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. http://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000535
12. Baskakov A. G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4
13. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 5, pp. 2443–2462. https://doi.org/10.1007/s00009-015-0633-0

Поступила в редакцию / Received 05.11.2019
Принята к публикации / Accepted 15.01.2020
Опубликована / Published 01.03.2021