УДК 501.1

Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида MR(S)/M(S)/∞ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова

Е. П. Полин, С. П. Моисеева, А. Н. Моисеев

Полин Евгений Павлович, аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, polin_evgeny@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, smoiseeva@mail.ru

Моисеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры программной инженерии, Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36, moiseev.tsu@gmail.com

Потоки данных в информационных и коммуникационных системах включают в себя интегрированные гетерогенные потоки, содержащие голос, текстовые данные и видео. Поскольку обслуживание разных информационных блоков занимает разное время в зависимости от их формата, используемых протоколов и т. д., предлагается моделировать такие процессы передачи данных с использованием гетерогенных систем массового обслуживания со службами, зависящими от параметров входящего потока. В статье рассматривается гетерогенная система массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления с двумя состояниями, заданными функциями распределения длин интервалов и матрицей вероятностей переходов. Параметр экспоненциального распределения времени обслуживания определяется состоянием базовой цепи Маркова в момент прибытия заявки и не изменяется до завершения обслуживания. Для изучения системы используется метод характеристических функций. Используя их свойства, получены аналитические выражения для начальных моментов первого и второго порядка числа заявок каждого типа в системе в стационарном режиме. Для анализа взаимосвязи между компонентами процесса получен корреляционный момент.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания, поток марковского восстановления, метод моментов.

Поступила в редакцию: 08.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликована: 31.08.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания — раздел теории вероятностей, позволяющий смоделировать и проанализировать поведение той или иной системы массового обслуживания (СМО). В настоящее время область применения теории массового обслуживания включает в себя множество различных сфер человеческой деятельности, в том числе промышленное производство, телекоммуникационные и информационные сети, медицину, страховые компании и пенсионные фонды [1–3].

Основоположником теории массового обслуживания является датский ученый А. К. Эрланг [4]. Предметом его исследования были телефонные системы, характеризующиеся случайным потоком вызовов абонентов, требующих случайного времени занятости телефонной линии. Расширение класса задач впоследствии привело к появлению различных модификаций систем массового обслуживания. Современные информационные и телекоммуникационные системы включают в себя разнотипные потоки данных, которые передают текстовые данные, голосовую информацию и информацию из видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве них используют математические модели марковских модулированных потоков (BMAP, MAP), полумарковских (SM) или их частных случаев (марковский модулированный пуассоновский поток MMPP, поток марковского восстановления MR и рекуррентный поток GI).

Различные единицы информации требуют различного времени обслуживания в зависимости от своего формата. В связи с этим в качестве моделей процессов в современных информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками [5–7], в которых обслуживание заявок каждого типа занимает различное время.

Данная статья посвящена исследованию числа занятых приборов в системе с входящим потоком марковского восстановления (MR). Дисциплина обслуживания в рассматриваемой СМО определяется состояниями вложенной по моментам восстановления цепи Маркова, в отличие от работы [8], где параметры обслуживания μ_k определяются вероятностями p_k. В работе [9] рассматривается СМО с расщеплением (копированием) заявок, которые обслуживаются в разных блоках с разными параметрами параллельно. В данной работе с помощью метода начальных моментов найдены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов в системе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход поступает поток марковского восстановления, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x), A_2(x), ...A_K(x)$ и матрицей $\mathbf{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, ..., K$ — вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова с конечным числом состояний $k(t) = 1, 2, ..., K$.

Дисциплина обслуживания определяется следующим образом: если вложенная цепь Маркова находится в состоянии $k(t) = s$, то поступающая заявка будет обслуживаться случайное время, распределенное по экспоненциальному закону $F_s(x) = 1 - e^{-\mu_s x}$. Ставится задача исследования многомерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), ..., i_K(t)]$ — числа занятых приборов разного типа в системе.

2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Ввиду громоздкости вывода формул для произвольного числа состояний вложенной цепи Маркова приведем теоретические выкладки для нахождения основных вероятностных характеристик для $k = 2$.

Определим четырехмерный марковский случайный процесс $\{k(t), z(t), i_1(t), i_2(t)\}$, где $z(t)$ — длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в потоке марковского восстановления, $k(t)$ — вложенная по моментам восстановления цепь Маркова.

Для распределения вероятностей

$$P(k,\ z, i_1, i_2, t) = P\{k(t) = k, z(t) < z,\ \ i_1(t) = i_1,\ \ i_2(t) = i_2\}$$

по теореме полной вероятности можно записать следующие равенства:

$$\begin{gathered}
P(1, z, i_1, i_2, t+\Delta t) = (P(1, z+\Delta t, i_1, i_2, t) - P(1, \Delta t, i_1, i_2, t))(i_1\mu_1 + i_2\mu_2)+\\
+P(1, \Delta t, i_1-1, i_2, t)P_{11}A_1(z-\Delta t) + P(2, \Delta t, i_1-1, i_2, t)P_{21}A_1(z-\Delta t)+\\
+P(1, z+\Delta t, i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\mu_1\Delta t + P(1, z+\Delta t, i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\mu_2\Delta t + o(\Delta t),
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
P(2, z, i_1, i_2, t+\Delta t) = (P(2, z+\Delta t, i_1, i_2, t) - P(2, \Delta t, i_1, i_2, t))(i_1\mu_1 + i_2\mu_2)+\\
+P(1, \Delta t, i_1, i_2-1, t)P_{12}A_2(z-\Delta t) + P(2, \Delta t, i_1, i_2-1, t)P_{22}A_2(z-\Delta t)+\\
+P(2, z+\Delta t, i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\mu_1\Delta t + P(2, z+\Delta t, i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\mu_2\Delta t + o(\Delta t).
\end{gathered}$$

Отсюда получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P(1,\ z, i_1, i_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(1,\ z, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(1,\ 0, i_1, i_2, t)}{\partial z} -\\
-(i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(1, z, i_1, i_2, t) + \frac{\partial P(1,\ 0, i_1-1, i_2, t)}{\partial z}P_{11}A_1(z)+\\
+\frac{\partial P(2,\ 0, i_1-1, i_2, t)}{\partial z}P_{21}A_1(z) + P(1,\ z, i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\mu_1+\\
+P(1,\ z, i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\mu_2,\\
\frac{\partial P(2,\ z, i_1, i_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(2,\ z, i_1, i_2, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(2,\ 0, i_1, i_2, t)}{\partial z} -\\
-(i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(2, z, i_1, i_2, t) + \frac{\partial P(2,\ 0, i_1, i_2-1, t)}{\partial z}P_{22}A_2(z)+\\
+\frac{\partial P(1,\ 0, i_1, i_2-1, t)}{\partial z}P_{12}A_2(z) + P(2,\ z, i_1+1, i_2, t)(i_1+1)\mu_1+\\
+P(2,\ z, i_1, i_2+1, t)(i_2+1)\mu_2.
\end{gathered} \tag{2}$$

Для стационарного распределения вероятностей запишем эту систему в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Pi(1,\ z, i_1, i_2)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(1,\ 0, i_1, i_2)}{\partial z} - (i_1\mu_1 + i_2\mu_2)\Pi(1, z, i_1, i_2)+\\
+\frac{\partial \Pi(1,\ 0, i_1-1, i_2)}{\partial z}P_{11}A_1(z) + \frac{\partial \Pi(2,\ 0, i_1-1, i_2)}{\partial z}P_{21}A_1(z)+\\
+\Pi(1,\ z, i_1+1, i_2)(i_1+1)\mu_1 + \Pi(1,\ z, i_1, i_2+1)(i_2+1)\mu_2 = 0,\\
\frac{\partial \Pi(2,\ z, i_1, i_2)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(2,\ 0, i_1, i_2)}{\partial z} - (i_1\mu_1 + i_2\mu_2)\Pi(2, z, i_1, i_2)+\\
+\frac{\partial \Pi(2,\ 0, i_1, i_2-1)}{\partial z}P_{22}A_2(z) + \frac{\partial \Pi(1,\ 0, i_1, i_2-1)}{\partial z}P_{12}A_2(z)+\\
+\Pi(2,\ z, i_1+1, i_2)(i_1+1)\mu_1 + \Pi(2,\ z, i_1, i_2+1)(i_2+1)\mu_2 = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

3. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введем характеристические функции

$$H(k, z, u_1, u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1i_1}e^{ju_2i_2}\Pi(k, z, i_1, i_2),$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_i} = j\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2}\Pi(k,z,i_1,i_2),$$

где $i = 1, 2$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial H(1,z,u_1,u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z} + j\mu_1(1-e^{-ju_1})\frac{\partial H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} +$$
$$+j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z}e^{ju_1}P_{11}A_1(z) +$$
$$+\frac{\partial H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z}e^{ju_1}P_{21}A_1(z) = 0, \tag{4}$$
$$\frac{\partial H(2,z,u_1,u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z} + j\mu_1(1-e^{-ju_1})\frac{\partial H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} +$$
$$+j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z}e^{ju_2}P_{12}A_2(z) +$$
$$+\frac{\partial H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z}e^{ju_2}P_{22}A_2(z) = 0. \tag{5}$$

Воспользуемся свойствами характеристической функции и продифференцируем (4) и (5) по u_1:

$$\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} - \frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} + j^2\mu_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} +$$
$$+j\mu_1(1-e^{-ju_1})\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2} + j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_2\partial u_1} +$$
$$+je^{ju_1}P_{11}A_1(z)\frac{\partial H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z} + e^{ju_1}P_{11}A_1(z)\frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} +$$
$$+je^{ju_1}P_{21}A_1(z)\frac{\partial H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z} + e^{ju_1}P_{21}A_1(z)\frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} = 0, \tag{6}$$
$$\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} - \frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} + j^2\mu_1 e^{-ju_1}\frac{\partial H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} +$$
$$+j\mu_1(1-e^{-ju_1})\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2} + j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_2\partial u_1} +$$
$$+e^{ju_2}P_{12}A_2(z)\frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} + e^{ju_2}P_{22}A_2(z)\frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1} = 0. \tag{7}$$

Продифференцируем (4) и (5) по u_2:

$$\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} - \frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} + j\mu_1\left(1-e^{-ju_1}\right)\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2} +$$
$$+j^2\mu_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} + j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial^2 H(1,z,u_1,u_2)}{\partial u_2^2} +$$
$$+e^{ju_1}P_{11}A_1(z)\frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} + e^{ju_1}P_{21}A_1(z)\frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_2} - \frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_2} + j\mu_1\left(1-e^{-ju_1}\right)\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} +$$
$$+ j^2\mu_2 e^{-ju_2}\frac{\partial H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} + j\mu_2(1-e^{-ju_2})\frac{\partial^2 H(2,z,u_1,u_2)}{\partial u_2^2} +$$
$$+ je^{ju_2}P_{12}A_2(z)\frac{\partial H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z} + e^{ju_2}P_{12}A_2(z)\frac{\partial^2 H(1,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} +$$
$$+ je^{ju_2}P_{22}A_2(z)\frac{\partial H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z} + e^{ju_2}P_{22}A_2(z)\frac{\partial^2 H(2,0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2} = 0. \qquad (9)$$

Положим в (6) и (7) $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial m_1^{(1)}(1,z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(1,z) + P_{11}A_1(z)R'(1,0) + \\
+ P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} + P_{21}A_1(z)R'(2,0) + P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial m_1^{(1)}(2,z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} - \mu_1 m_1^{(1)}(2,z) + \\
+ P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z} + P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \qquad (10)$$

Положим в (8) и (9) $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial m_1^{(2)}(1,z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(1,z) + \\
+ P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z} + P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial m_1^{(2)}(2,z)}{\partial z} - \frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z} - \mu_2 m_1^{(2)}(2,z) + P_{12}A_2(z)R'(1,0) + \\
+ P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z} + P_{22}A_2(z)R'(2,0) + P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \qquad (11)$$

Запишем систему (10) в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}(z) - \mathbf{I}\right] + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)\mathbf{E}_{11} - \mu_1 \mathbf{m}_1^{(1)}(z) = 0. \qquad (12)$$

Здесь $\mathbf{m}_1^{(1)}(z) = \left[m_1^{(1)}(1,z),\ m_1^{(1)}(2,z)\right]$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(z)\end{bmatrix}$,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial m_1^{(1)}(1,z)}{\partial z},\ \frac{\partial m_1^{(1)}(2,z)}{\partial z}\right],$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \left[\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z},\ \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z}\right], \quad \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \left[\frac{\partial R(1,0)}{\partial z},\ \frac{\partial R(2,0)}{\partial z}\right].$$

Эту систему дифференциальных уравнений будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стилтьеса

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_1^{(1)}(z), \mathbf{A}*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z).$$

Выполнив в (12) преобразование Лапласа – Стилтьеса, получим

$$\phi_1(\alpha)(\mu_1-\alpha)=\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}*(\alpha)-\mathbf{I}\right]+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\alpha)\mathbf{E}_{11}. \tag{13}$$

Положив в (13) $\alpha=\mu_1$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11}\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}.$$

Тогда

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(\infty)=\phi_1(0)=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11}\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}\left[\mathbf{PA}*(0)-\mathbf{I}\right]+$$
$$+\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{11}.$$

Отметим, что $\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}=\lambda\mathbf{r}$ и $\mathbf{rP}=\mathbf{r}$, $\mathbf{re}=1$.
Для начального момента первого порядка можно записать

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(\infty)=\frac{\lambda}{\mu_1}\mathbf{rE}_{11}.$$

Умножим на единичный вектор $\mathbf{e}$, получим

$$m_1^{(1)}(\infty)=\frac{\lambda}{\mu_1},$$

где $\lambda=\frac{1}{\int\limits_0^\infty(1-\mathbf{rA}(u)\mathbf{e})du}$.

4. НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из свойств характеристической функции имеем

$$\left.\frac{\partial^2 H(k,u_1,u_2,z)}{\partial u_i^2}\right|_{\substack{u_1=0\\ u_2=0}}=j^2 m_2^{(i)}(k,z),$$

где $i=1,2$.

Продифференцировав (6)–(9) по u_1 и u_2 и положив $u_1=0$ и $u_2=0$, получим 4 системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial m_2^{(1)}(1,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1)}(1,0)}{\partial z}-\mu_1 m_1^{(1)}(1,z)+2\mu_1 m_2^{(1)}(1,z)-P_{11}A_1(z)R'(1,0)-\\ -2P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z}-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1)}(1,0)}{\partial z}-\\ -P_{21}A_1(z)R'(2,0)-2P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1)}(2,0)}{\partial z}=0,\\ -\frac{\partial m_2^{(1)}(2,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1)}(2,0)}{\partial z}-\mu_1 m_1^{(1)}(2,z)+\\ +2\mu_1 m_2^{(1)}(2,z)-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1)}(1,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1)}(2,0)}{\partial z}=0;\end{gathered} \tag{14}$$

$$-\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}+\mu_1 m_2^{(1,2)}(1,z)+\mu_2 m_2^{(1,2)}(1,z)-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z}-$$
$$-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}=0, \qquad (15)$$
$$-\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}+\mu_1 m_2^{(1,2)}(2,z)+\mu_2 m_2^{(1,2)}(2,z)-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z}-$$
$$-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}=0;$$
$$-\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}+\mu_1 m_2^{(1,2)}(1,z)+\mu_2 m_2^{(1,2)}(1,z)-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z}-$$
$$-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}=0, \qquad (16)$$
$$-\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}+\mu_1 m_2^{(1,2)}(2,z)+\mu_2 m_2^{(1,2)}(2,z)-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z}-$$
$$-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(1,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(1,2)}(2,0)}{\partial z}=0;$$
$$-\frac{\partial m_2^{(2)}(1,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z}-\mu_2 m_1^{(2)}(1,z)+2\mu_2 m_2^{(2)}(1,z)-$$
$$-P_{11}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z}-P_{21}A_1(z)\frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z}=0,$$
$$-\frac{\partial m_2^{(2)}(2,z)}{\partial z}+\frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z}-\mu_2 m_1^{(2)}(2,z)+2\mu_2 m_2^{(2)}(2,z)- \qquad (17)$$
$$-P_{12}A_2(z)R'(1,0)-2P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(1,0)}{\partial z}-P_{12}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(2)}(1,0)}{\partial z}-$$
$$-P_{22}A_2(z)R'(2,0)-2P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_1^{(2)}(2,0)}{\partial z}-P_{22}A_2(z)\frac{\partial m_2^{(2)}(2,0)}{\partial z}=0.$$

Запишем системы (14)–(17) в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}(z)-\mathbf{I}\right]+\mu_1\mathbf{m}_1^{(1)}(z)-2\mu_1\mathbf{m}_2^{(1)}(z)+$$
$$+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)\mathbf{E}_{11}+2\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)\mathbf{E}_{11}=0; \qquad (18)$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}(z)-\mathbf{I}\right]-\mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)\left(\mu_1+\mu_2\right)+\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)=0; \qquad (19)$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}(z)-\mathbf{I}\right]-\mathbf{m}_2^{(1,2)}(z)\left(\mu_1+\mu_2\right)+$$
$$+\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)=0; \qquad (20)$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(2)}(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(2)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}(z)-\mathbf{I}\right]+\mu_2\mathbf{m}_1^{(2)}(z)-2\mu_2\mathbf{m}_2^{(2)}(z)+$$
$$+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)\mathbf{E}_{22}+2\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}(z)\mathbf{E}_{22}=0. \qquad (21)$$

В уравнениях (18)–(21)

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(z) = \left[m_1^{(1)}(1,z),\ m_1^{(1)}(2,z) \right], \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(z) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} = \left[\frac{\partial m_1^{(1)}(1,z)}{\partial z}, \ \frac{\partial m_1^{(1)}(2,z)}{\partial z} \right], \quad \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \left[\frac{\partial m_1^{(1)}(1,0)}{\partial z}, \ \frac{\partial m_1^{(1)}(2,0)}{\partial z} \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \left[\frac{\partial R(1,0)}{\partial z}, \ \frac{\partial R(2,0)}{\partial z} \right].$$

Систему дифференциальных уравнений (18) будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стилтьеса

$$\phi_1(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\partial z} d\mathbf{m}_1^{(1)}(z), \quad \phi_2(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_2^{(1)}(z), \quad \mathbf{A}*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{A}(z).$$

Выполнив в (18) преобразование Лапласа – Стилтьеса, получим

$$\phi_2(\alpha)(2\mu_1 - \alpha) = \frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z} \left[\mathbf{PA}*(\alpha) - \mathbf{I} \right] + 2\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(\alpha)\mathbf{E}_{11} + \\ + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(\alpha)\mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(\alpha). \tag{22}$$

Положив в (22) $\alpha = 2\mu_1$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{m}_2^{(1)}(0)}{\partial z} = \left(2\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(2\mu_1)\mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(2\mu_1)\mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(2\mu_1) \right) \times \\ \times \left[\mathbf{I} - \mathbf{PA}*(2\mu_1) \right]^{-1}.$$

Тогда

$$\phi_2(0) = \frac{1}{2\mu_1} \left(2\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(2\mu_1)\mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(2\mu_1)\mathbf{E}_{11} + \mu_1 \phi_1(2\mu_1) \right) \times \\ \times \left[\mathbf{I} - \mathbf{PA}*(2\mu_1) \right]^{-1} \left[\mathbf{PA}*(0) - \mathbf{I} \right] + \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11} \times \\ \times \left[\mathbf{I} - \mathbf{PA}*(\mu_1) \right]^{-1} \mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{11} + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{11} + \lambda \mathbf{r}\mathbf{E}_{11}.$$

Отметим, что $\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} = \lambda \mathbf{r}$ и $\mathbf{rP} = \mathbf{r}$, $\mathbf{re} = 1$, $\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty (1 - \mathbf{rA}(u)\mathbf{e}) du}$.

Для начального момента второго порядка заявок первого типа в системе получим равенство

$$m_2^{(1)}(\infty) = \mathbf{m}_2^{(1)}(\infty)\mathbf{e} = \phi_2(0)\mathbf{e} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z} \mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11} \times$$

$$\times\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{11}\mathbf{e}+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{11}\mathbf{e}+\lambda\mathbf{r}\mathbf{E}_{11}\mathbf{e}.$$

Для начального момента второго порядка заявок второго типа в системе получим равенство

$$m_2^{(2)}(\infty)=\mathbf{m}_2^{(2)}(\infty)\mathbf{e}=\phi_2(0)\mathbf{e}=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_2)\mathbf{E}_{22}\times$$

$$\times\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_2)\right]^{-1}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{22}\mathbf{e}+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_{22}\mathbf{e}+\lambda\mathbf{r}\mathbf{E}_{22}\mathbf{e}.$$

Аналогичным образом можно получить моменты первого и второго порядков заявок k-го типа в системе. Моменты первого порядка числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемой системе определяются равенствами

$$m_1^{(k)}(\infty)=\frac{\lambda}{\mu_k},$$

где λ — интенсивность потока марковского восстановления, которая определяется выражением

$$\lambda=\frac{1}{\int\limits_0^\infty(1-\mathbf{r}\mathbf{A}(u)\mathbf{e})\,du}.$$

Здесь $\mathbf{r}=[r(1),\ r(2),\ldots,\ r(K)]$ — вектор стационарного распределения вероятностей значений вложенной цепи Маркова.

Моменты второго порядка числа занятых приборов каждого типа в системе имеют вид

$$m_2^{(k)}(\infty)=\frac{1}{\mu_k}\lambda\mathbf{r}\mathbf{PA}*(\mu_k)\mathbf{E}_k\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_k)\right]^{-1}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_k\mathbf{e}+\lambda\mathbf{r}\mathbf{PA}*(0)\mathbf{E}_k\mathbf{e}+\lambda\mathbf{r}\mathbf{E}_k\mathbf{e}.$$

Здесь $\mathbf{A}*(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{A}(z)$, $\mathbf{E}_k$ — квадратная матрица, все элементы которой равны 0, кроме $e_{kk}=1$.

5. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Систему дифференциальных уравнений (19) будем решать при помощи преобразования Лапласа – Стилтьеса

$$\theta(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{m}_2^{(1,2)}(z),\ A*(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{A}(z).$$

Выполнив в (19) преобразование Лапласа – Стилтьеса, получим

$$\theta(\alpha)(\mu_1+\mu_2-\alpha)=\frac{\partial\mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z}\left[\mathbf{PA}*(\alpha)-\mathbf{I}\right]+\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\alpha). \qquad (23)$$

Учитывая, что $\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}=\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11}\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}$, и положив в (23) $\alpha=\mu_1+\mu_2$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{m}_2^{(1,2)}(0)}{\partial z}=\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11}\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}\mathbf{PA}*(\mu_1+\mu_2)\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1+\mu_2)\right]^{-1}.$$

Тогда

$$m_2^{(1,2)}=\theta(0)\mathbf{e}=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PA}*(\mu_1)\mathbf{E}_{11}\left[\mathbf{I}-\mathbf{PA}*(\mu_1)\right]^{-1}\mathbf{P}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построена и исследована математическая модель обслуживания заявок в бесконечнолинейной гетерогенной системе массового обслуживания $MR(s)|M(s)|\infty$ с входящим потоком марковского восстановления. Определены аналитические выражения для нахождения первого и второго моментов, характеризующих число занятых приборов каждого типа в системе, а также коэффициента корреляции.

Библиографический список

1. *Гарайшина И. Р., Назаров А. А.* Исследование математической модели процесса изменения страхового капитала Пенсионного фонда // Вестн. Том. гос. ун-та. 2003. № 280. С. 109–111.
2. *Фокина Н. П., Тананко И. Е.* Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. вып. 2, ч. 2. С. 82–88. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88
3. *Ахмедова Д. Д., Терпугов А. Ф.* Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001.Т. 44, № 1. С. 25–29.
4. *Erlang A. K.* The theory of probability and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. B. 1909. Vol. 20. P. 33–39.
5. *Панкратова Е. В.* Исследование системы массового обслуживания $GI/GI/\infty$ с двумя типами заявок // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. Ч. 1. С. 152–157.
6. *Панкратова Е. В.* Исследование системы массового обслуживания $MAP|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети : Управление, вычисление, связь (DCCN-2015) – Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015) : материалы Восемнадцатой междунар. науч. конф. (Москва, 19–22 октября 2015 г.). М. : ИПУ РАН, 2015. С. 585–592.
7. *Pankratova E. V., Moiseeva S. P.* Queueing System $GI/GI/\infty$ with n Types of Customers // Communications in Computer and Information Science. Switzerland : Springer, 2015. Vol. 564. P. 216–225.
8. *Моисеева С. П., Панкратова Е. В., Убонова Е. Г.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 46–53. DOI: https://doi.org/10.17223/19988605/35/5
9. *Моисеева С. П., Синякова И. А.* Метод моментов для исследования математической модели параллельного обслуживания кратных заявок потока марковского восстановления // Изв. ТПУ. 2012. Т. 321, № 5. С. 24–28.

Образец для цитирования:

Полин Е. П., Моисеева С. П., Моисеев А. Н. Анализ вероятностных характеристик гетерогенной СМО вида $MR(S)/M(S)/\infty$ с параметрами обслуживания, зависящими от состояния вложенной цепи Маркова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 388–399. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399

Heterogeneous Queueing System MR(S)/M(S)/∞ with Service Parameters Depending on the State of the Underlying Markov Chain

E. P. Polin, S. P. Moiseeva, A. N. Moiseev

Evgeny P. Polin, https://orcid.org/0000-0002-0250-2368, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, polin_evgeny@mail.ru

Svetlana P. Moiseeva, https://orcid.org/0000-0001-9285-1555, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, smoiseeva@mail.ru

Alexander N. Moiseev, https://orcid.org/0000-0003-2369-452X, Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia, moiseev.tsu@gmail.com

Data streams in information and communication systems include integrated heterogeneous streams, containing voice, text data and video. Since the service of different information units takes different time depending on their format, used protocols and so on, it is proposed to model such data transmission processes using heterogeneous queueing systems with services depending on the parameters of the incoming stream. In the paper, an infinite-server heterogeneous queueing system is considered. Arrivals are modeled as a Markov renewal process (MRP) with two states given by distribution functions of the interval lengths and by a transition probability matrix. The exponential distribution parameter of service time is determined by the state of the underlying Markov chain of the MRP at the moment when a customer arrives and does not change until the service completion. To study the system, the method of characteristic functions is used. Using their properties, analytical expressions are obtained for the initial moments of the first and the second order of the number of customers of each type present in the system in a steady-state regime. To analyze the relationship between the components of the process, a correlation moment is derived.

Keywords: infinite-server queueing system, Markov renewal process, method of initial moments.

Received: 08.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 31.08.2020

References

1. Garayshina I. R., Nazarov A. A. Investigation of Russian Federation retirement fund insurance capital modification process mathematical model. *Tomsk State University Journal*, 2003, no. 280, pp. 109–111 (in Russian).
2. Fokina N. P., Tananko I. E. A Method of Routing Control in Queueing Networks with Changing Topology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 82–88 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-2-82-88
3. Akhmedova D. D., Terpugov A. F. Mathematical model of an insurance company taking into account advertising costs. *Izvestiya vuzov. Fizika*, 2001, vol. 44, no. 1, pp. 25–29 (in Russian).
4. Erlang A. K. The theory of probability and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, B, 1909, vol. 20, pp. 33–39.
5. Pankratova E. V. Investigation of the queuing system GI/GI/∞ with two types of arrivals. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2015): materialy XIV Mezhdunar. konf. im. A. F. Terpugova* [Information Technology and Mathematical Modeling (ITMM-2015). Materials of the XIV Int. conf. named after A. F. Terpugov]. Tomsk, Izd-vo Tomskogo universiteta, 2015, pt. 1, pp. 152–157 (in Russian).

6. Pankratova E. V. Investigation of the queuing system MAP|M|∞ with heterogeneous service using the asymptotic analysis method under the condition of extremely rare changes in the state of the incoming stream. In: *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015)*. Moscow, Institut problem upravleniya RAS, 2015, pp. 585–592 (in Russian).
7. Pankratova E. V., Moiseeva S. P. Queueing System GI/GI/∞ with n Types of Customers. *Communications in Computer and Information Science*. Switzerland, Springer, 2015, vol. 564, pp. 216–225.
8. Moiseeva S. P., Pankratova E. V., Ubonova E. G. Queuing system with renewal arrival process and two types of customers. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2016, no. 2 (35), pp. 46–53 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.17223/19988605/35/5
9. Moiseeva S. P., Sinyakova I. A. The method of moments for the study of the mathematical model of parallel servicing multiple claims of the Markov renewal process. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 5, pp. 24–28 (in Russian).

Cite this article as:

Polin E. P., Moiseeva S. P., Moiseev A. N. Heterogeneous Queueing System MR(S)/M(S)/∞ with Service Parameters Depending on the State of the Underlying Markov Chain. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 388–399 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-388-399