УДК 519.64,517.2

О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений

Э. Г. Халилов

Халилов Эльнур Гасан оглы, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и прикладной математики, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Азербайджан, AZ1010, г. Баку, просп. Азадлыг, 20, elnurkhalil@mail.ru

Работа посвящена исследованию решения одного класса слабо сингулярных поверхностных интегральных уравнений второго рода. Сначала дается разбиение поверхности Ляпунова на «регулярные» элементарные части, а затем в опорных точках строится кубатурная формула для одного класса слабо сингулярных поверхностных интегралов. Используя построенную кубатурную формулу, рассматриваемое интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений. В результате при дополнительно налагаемых условиях на ядро интеграла доказывается, что рассматриваемое интегральное уравнение и полученная система алгебраических уравнений имеют единственные решения, причем решение системы алгебраических уравнений сходится к значению решения интегрального уравнения в опорных точках. Кроме того, используя эти результаты, дано обоснование метода коллокации для различных интегральных уравнений внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: метод коллокации, интегральные уравнения второго рода, кубатурная формула, слабо сингулярный поверхностный интеграл, краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

Поступила в редакцию: 04.06.2019 / Принята: 11.09.2019 / Опубликована: 31.08.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что многочисленные теоретические и прикладные задачи математики, физики и механики (например, внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и др.) приводят к различным классам интегральных уравнений (ИУ) второго рода. Отметим, что основное преимущество применения метода граничных интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности.

Поскольку ИУ точно решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение как для теории, так и в особенности для ее приложений приобретает разработка приближенных методов решения ИУ с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что приближенное решение для некоторых классов слабо сингулярных интегральных уравнений исследовано в работах [1–6], а для некоторых классов сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений — в работах [7–11]. Мы же в настоящей работе рассмотрим следующее более общее ИУ, к которому может быть приведен целый ряд пространственных краевых задач:

$$\rho + A\rho = f, \tag{1}$$

где

$$(A\rho)(x) = \int\limits_S \frac{K(x,y)}{|x-y|^n}\rho(y)dS_y, \quad x \in S, \tag{2}$$

$S \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность Ляпунова, n — натуральное число, $K(x,y)$ — непрерывная функция на $S \times S$ и существует число $\lambda \in (0,2)$ такое, что

$$|K(x,y)| \leqslant M|x-y|^{n-\lambda}, \quad \forall\, x,y \in S, \tag{3}$$

$f(x)$ — непрерывная функция на поверхности S, а $\rho(x)$ — искомая непрерывная функция на S. Здесь и далее через M обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Настоящая работа посвящена обоснованию метода коллокации для ИУ (1) .

2. КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Разобьем S на элементарные части $S = \bigcup\limits_{l=1}^{N} S_l$.

1. Для каждого $l \in \{1,2,\ldots,N\}$ элементарная часть S_l замкнута и множество $\overset{0}{S_l}$ ее внутренних относительно S точек не пусто, причем $\operatorname{mes}\overset{0}{S_l} = \operatorname{mes} S_l$ и $\overset{0}{S_l} \bigcap \overset{0}{S_j} = \varnothing$ при $j \in \{1,2,\ldots,N\}, j \neq l$, где через $\operatorname{mes} S_l$ обозначена площадь элементарной части S_l.
2. Для каждого $l \in \{1,2,\ldots,N\}$ элементарная часть S_l представляет собой связной кусок поверхности S с непрерывной границей.
3. Для каждого $l \in \{1,2,\ldots,N\}$ существует так называемая опорная точка $x_l \in S_l$ такая, что:
   - 3.1. $r_l(N) \sim R_l(N)$ ($r_l(N) \sim R_l(N) \;\rightarrow\; C_1 \leqslant r_l(N)/R_l(N) \leqslant C_2$, C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от N), где $r_l(N) = \min\limits_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$ и $R_l(N) = \max\limits_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$;
   - 3.2. $R_l(N) \leqslant d/2$, где d — радиус стандартной сферы [12, с. 400];
   - 3.3. Для всех $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ выполняется $r_j(N) \sim r_l(N)$.

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim\limits_{N\to\infty} R(N) = 0$, где $R(N) = \max\limits_{l=\overline{1,N}} R_l(N)$, $r(N) = \min\limits_{l=\overline{1,N}} r_l(N)$.

Пример 1. Проведем разбиение единичной сферы T на элементарные части. Перейдем к сферической системе координат. Тогда для любой точки $Q(y_1,y_2,y_3) \in \mathrm{T}$

$$\begin{cases} y_1 = \sin u \cos v, \\ y_2 = \sin u \sin v, \\ y_3 = \cos u. \end{cases} .$$

Здесь $u \in [0, \pi]$ есть угол, образованный вектором $\overrightarrow{OQ}$ с осью y_3, а $v \in [0, 2\pi]$ есть двугранный угол, образованный плоскостью, проходящей через полярную ось y_3 и точку Q, с плоскостью $y_2 = 0$. Проведем на сфере T параллель $u = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3$, где $\mathrm{T}_1 = \{Q \in \mathrm{T} : 0 \leqslant u < \pi/2\}$ — верхняя полусфера, $\mathrm{T}_2 = \{Q \in \mathrm{T} : u = \pi/2\}$ — экватор, а $\mathrm{T}_3 = \{Q \in \mathrm{T} : \pi/2 < u \leqslant \pi\}$ — нижняя полусфера. T_1 равномерно покроем семейством параллелей $u_i = \frac{\pi i}{2\ell}$, $i = \overline{1, \ell - 1}$, где $\ell \geqslant 2$ и ℓ-я параллель совпадает с экватором. Каждую i-ю параллель, начиная от точки пересечения с плоскостью $y_2 = 0$ $(y_1 > 0)$, разделим на $4m_i(m_i = 2^{[\log_2 i]}$ ($[\cdot]$ — целая часть) равных частей $v_j^{(i)} = \frac{\pi j}{2m_i}$, $j = \overline{0, 4m_i - 1}$, $i = \overline{1, \ell - 1}$. Из каждой точки деления проведем часть меридиана вплоть до экватора T_2. Нижняя полусфера T_3, ввиду симметричности T относительно плоскости $y_3 = 0$, разобьется следующим образом:

$$\begin{cases} u_{2\ell-i} = \pi - u_i, & i = \overline{1, \ell - 1}, \\ v_j^{(2\ell-i)} = v_j^{(i)}, & j = \overline{0, 4m_i - 1}. \end{cases}$$

Точки пересечения параллелей с меридианами назовем узлами и обозначим их через $Q_{k,l}$ $(k = \overline{1, 2\ell - 1},\ l = \overline{0, 4m_k - 1})$. Пусть $\widehat{Q_{k_1,l}Q_{k_2,l}}$ $(\widehat{Q_{k,l_1}Q_{k,l_2}})$ есть дуга по меридиану (параллели), соединяющая узлы $Q_{k_1,l}$ (Q_{k,l_1}) и $Q_{k_2,l}$ (Q_{k,l_2}) и содержащая их. Построенная географическая сеть разбивает T_k $(k = \overline{1, 3})$ следующим образом:

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_{0,\ell} \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{\ell-1} \Big(\bigcup_{j=0}^{4m_i-1} \mathrm{T}_{ij} \Big)\Big), \quad \mathrm{T}_2 = \bigcup_{j=0}^{4m_\ell-1} \Big(\widehat{Q_{\ell,j}Q_{\ell,j+1}} \backslash \{Q_{\ell,j+1}\} \Big),$$

$$\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_{2\ell,\ell} \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{\ell-1} \Big(\bigcup_{j=0}^{4m_i-1} \mathrm{T}_{2\ell-i,j} \Big)\Big),$$

где

$$\mathrm{T}_{0,\ell} = \Big\{ Q \in \mathrm{T}_1 :\ 0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2\ell},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \Big\},$$
$$\mathrm{T}_{2\ell,\ell} = \Big\{ Q \in \mathrm{T}_3 : \pi - \frac{\pi}{2\ell} \leqslant u \leqslant \pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \Big\},$$
$$\mathrm{T}_{ij} = \{Q \in \mathrm{T}_1 : u_i \leqslant u < u_{i+1}, v_j^{(i)} \leqslant v < v_{j+1}^{(i)}\},$$
$$\mathrm{T}_{2\ell-i,j} = \{Q \in \mathrm{T}_3 : \pi - u_{i+1} < u \leqslant \pi - u_i, v_j^{(i)} \leqslant v < v_{j+1}^{(i)}\}.$$

Элементы T_2 включим в $\mathrm{T}_{\ell-1,j}$ и $\mathrm{T}_{\ell+1,j}$ по следующему закону: если j — нечетное, то $\widehat{Q_{\ell,j}Q_{\ell,j+1}} \backslash \{Q_{\ell,j+1}\}$ присоединим к $\mathrm{T}_{\ell-1,j}$, а если j — четное, то к $\mathrm{T}_{\ell+1,j}$. В результате каждая точка сферы принадлежит одному из элементарных множеств $\mathrm{T}_{0,\ell}$, $\mathrm{T}_{i,j}$, $\mathrm{T}_{2\ell-i,j}$ и $\mathrm{T}_{2\ell,\ell}$. При этом координаты опорных точек $P_{0,\ell} \in T_{0,\ell}$, $P_{i,j} \in T_{i,j}$, $P_{2\ell-i,j} \in T_{2\ell-i,j}$ и $P_{2\ell,\ell} \in T_{2\ell,\ell}$ находятся по следующим формулам:

для верхней полусферы —

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = 0, & 0 \leqslant \bar{v}_0 \leqslant 2\pi, \\ \bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), & \bar{v}_j^{(i)} = \frac{1}{2}(v_j^{(i)} + v_{j+1}^{(i)}); \end{cases}$$

для нижней полусферы —

$$\begin{cases} \bar{u}_{2\ell-i} = \pi - \bar{u}_i, & \bar{v}_j^{(2\ell-i)} = \bar{v}_j^{(i)}, \\ \bar{u}_{2\ell} = \pi, & 0 \leqslant \bar{v}_\ell \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Нетрудно подсчитать общее количество опорных точек:

$$N_1 = 2\left(4\left(2^m\ell - \frac{2^{2m+1}+1}{3}\right)+1\right),$$

где m — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $2^m \leqslant \ell - 1$. Пусть $Q^*_{i,j}$ — точка с координатами $(u_i, \bar{v}_j^{(i)})$ и

$$R_{0,\ell} = \max_{Q\in\partial T_{0,\ell}} |P_{0,\ell} - Q|, \quad R_{i,j} = \max_{Q\in\partial T_{i,j}} |P_{i,j} - Q|,$$
$$R_{2\ell-i,j} = \max_{Q\in\partial T_{2\ell-i,j}} |P_{2\ell-i,j} - Q|, \quad R_{2\ell,\ell} = \max_{Q\in\partial T_{2\ell,\ell}} |P_{2\ell,\ell} - Q|,$$
$$r_{0,\ell} = \min_{Q\in\partial T_{0,\ell}} |P_{0,\ell} - Q|, \quad r_{i,j} = \min_{Q\in\partial T_{i,j}} |P_{i,j} - Q|,$$
$$r_{2\ell-i,j} = \min_{Q\in\partial T_{2\ell-i,j}} |P_{2\ell-i,j} - Q|, \quad r_{2\ell,\ell} = \min_{Q\in\partial T_{2\ell,\ell}} |P_{2\ell,\ell} - Q|.$$

Принимая во внимание разбиение единичной сферы T на элементарные части, имеем $R_{2\ell,\ell} = r_{2\ell,\ell} = r_{0,\ell} = R_{0,\ell}$, $R_{2\ell-i,j} = R_{i,j} = R_{i,0}$ и $r_{2\ell-i,j} = r_{i,j} = r_{i,0}$. Очевидно, что

$$R_{0,\ell} = |P_{0,\ell} - Q_{1,0}| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2\ell} + (1-\cos\frac{\pi}{2\ell})^2} = 2\sin\frac{\pi}{4\ell}.$$

Кроме того, учитывая, что $T_{i,j}$ является равнобедренной трапециеобразной фигурой, находим:

$$R_{i,0} = |P_{i,0} - Q_{i+1,0}| =$$
$$= \sqrt{(\sin\bar{u}_i\cos\bar{v}_0^{(i)} - \sin u_{i+1})^2 + (\sin\bar{u}_i\sin\bar{v}_0^{(i)})^2 + (\cos\bar{u}_i - \cos u_{i+1})^2} =$$
$$= 2\sqrt{\sin^2\frac{\bar{u}_i - u_{i+1}}{2} + \sin^2\frac{\bar{v}_0^{(i)}}{2}\sin\bar{u}_i\sin u_{i+1}} =$$
$$= 2\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8\ell} + \sin^2\frac{\pi}{8m_i}\sin\frac{\pi(2i+1)}{4\ell}\sin\frac{\pi(i+1)}{2\ell}}$$

и

$$r_{i,0} = |P_{i,0} - Q^*_{i,0}| =$$
$$= \sqrt{(\sin\bar{u}_i\cos\bar{v}_0^{(i)} - \sin u_i\cos\bar{v}_0^{(i)})^2 + (\sin\bar{u}_i\sin\bar{v}_0^{(i)} - \sin u_i\sin\bar{v}_0^{(i)})^2 + (\cos\bar{u}_i - \cos u_i)^2} =$$
$$= 2\sqrt{\sin^2\frac{\bar{u}_i - u_i}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{8\ell}.$$

В результате получаем $R(N_1) = \max\limits_{i=\overline{1,\ell-1}} R_{i,0}$ и $r(N_1) = 2\sin\frac{\pi}{8\ell}$. Так как

$$R_{i,0} \leqslant \frac{\pi}{4\ell}\sqrt{\frac{\pi^2(i+1)(i+1/2)}{i^2}+1} \leqslant \frac{\pi\sqrt{3\pi^2+1}}{4\ell}, i = \overline{1,\ell-1},$$

то $R(N_1) \leqslant \frac{\pi\sqrt{3\pi^2+1}}{4\ell}$. Как видно, $r(N_1) \sim R(N_1) \sim \frac{1}{\ell}$.

Таким же способом можно разбить эллипсоид.

Пусть $S_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$ есть, соответственно, части поверхности S и касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x \in S$, заключенные внутри сферы $B_d(x)$ радиуса d с центром в точке x. Кроме того, пусть $\tilde{y} \in \Gamma(x)$ есть проекция точки $y \in S$. Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leqslant |x - y| \leqslant C_1(S)|x - \tilde{y}| \quad \text{и} \quad \operatorname{mes} S_d(x) \leqslant C_2(S) \operatorname{mes} \Gamma_d(x), \tag{4}$$

где $C_1(S)$, $C_2(S)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от S (если S — сфера, то $C_1(S) = \sqrt{2}$, $C_2(S) = 2$).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от N, для которых при всех $l, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $j \neq l$, и всех $y \in S_j$ справедливо следующее неравенство:*

$$C_0'|y - x_l| \leqslant |x_j - x_l| \leqslant C_1'|y - x_l|. \tag{5}$$

Доказательство. Принимая во внимание способ разбиения поверхности S на элементарные части, имеем:

$$|x_j - x_l| \leqslant |y - x_l| + |y - x_j| \leqslant |y - x_l| + R_j(N) \leqslant |y - x_l| + Mr_l(N) \leqslant (1 + M)|y - x_l|$$

и

$$|y - x_l| \leqslant |x_j - x_l| + |y - x_j| \leqslant |x_j - x_l| + R_j(N) \leqslant |x_j - x_l| + Mr_l(N) < (1 + M)|x_j - x_l|,$$

чем и завершается доказательство леммы. □

Для непрерывной на S функции $\varphi(x)$ введем модуль непрерывности $\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup\limits_{\tau \geqslant \delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}$, $\delta > 0$, где $\bar{\omega}(\varphi, \tau) = \max\limits_{|x-y| \leqslant \tau; x, y \in S} |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Кроме того, пусть

$$a_{lj} = 0 \quad \text{при} \quad l = j, \quad a_{lj} = \frac{K(x_l, x_j)}{|x_l - x_j|^n} \operatorname{mes} S_j \quad \text{при} \quad l \neq j.$$

Теорема 1. *Пусть непрерывная на $S \times S$ функция $K(x, y)$ удовлетворяет условию (3) и существует натуральное число m такое, что*

$$|K(x, y') - K(x, y'')| \leqslant M \sum_{j=1}^{m} |y' - y''|^{\alpha_j} |x - y'|^{\beta_j} |x - y''|^{\gamma_j}, \quad \forall\, x, y', y'' \in S, \tag{6}$$

где $0 < \alpha_j \leqslant 1$, $\beta_j \geqslant 0$, $\gamma_j \geqslant 0$ и $\alpha_j + \beta_j + \gamma_j > n - 2$, $j = \overline{1, m}$. Тогда выражение

$$A^N(x_l) = \sum_{j=1}^{N} a_{lj} \rho(x_j) \tag{7}$$

в точках x_l, $l = \overline{1, N}$, является кубатурной формулой для интеграла (2) с непрерывной на S плотностью ρ, причем справедлива следующая оценка:

$$\max_{l=\overline{1,N}} |(A\rho)(x_l) - A^N(x_l)| \leqslant M[\|\rho\|_\infty (R(N))^\gamma |\ln R(N)| + \omega(\rho, R(N))],$$

где $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{x \in S} |\rho(x)|$, $\gamma = \min\{\alpha, 2 - \lambda, \alpha + \beta + 2 - n\}$, $\alpha = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \alpha_j$, $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \{\alpha_j + \beta_j + \gamma_j\} - \alpha$.

Доказательство. Очевидно, что

$$(A\rho)(x_l)-A^N(x_l)=\int\limits_{S_l}\frac{K(x_l,y)}{|x_l-y|^n}\rho(y)\,dS_y+\sum_{j=1,j\neq l}^{N}\int\limits_{S_j}\frac{K(x_l,y)-K(x_l,x_j)}{|x_l-y|^n}\rho(y)\,dS_y+$$

$$+\sum_{j=1,j\neq l}^{N}\int\limits_{S_j}\left(\frac{1}{|x_l-y|^n}-\frac{1}{|x_l-x_j|^n}\right)K(x_l,x_j)\rho(y)\,dS_y+$$

$$+\sum_{j=1,j\neq l}^{N}\int\limits_{S_j}\frac{K(x_l,x_j)}{|x_l-x_j|^n}(\rho(y)-\rho(x_j))\,dS_y.$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $r_1^N(x_l)$, $r_2^N(x_l)$, $r_3^N(x_l)$, $r_4^N(x_l)$ соответственно.

Учитывая (3) и (4) и применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим:

$$|r_1^N(x_l)|\leqslant M\|\rho\|_\infty\int\limits_{S_l}\frac{1}{|x_l-y|^\lambda}\,dS_y\leqslant$$

$$\leqslant M\|\rho\|_\infty C_2(S)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R(N)}\frac{1}{t^{\lambda-1}}\,dt\,d\varphi=M\|\rho\|_\infty(R(N))^{2-\lambda}.$$

Пусть $y\in S_j$ и $j\neq l$. Тогда по неравенству (5)

$$|y-x_j|\leqslant(1+C_1')|y-x_l|,$$

а, значит, по условию (6)

$$|K(x_l,y)-K(x_l,x_j)|\leqslant M|x_j-y|^\alpha|x_l-y|^\beta.$$

Тогда имеем:

$$|r_2^N(x_l)|\leqslant M(R(N))^\alpha\|\rho\|_\infty\int\limits_{S\backslash S_l}\frac{1}{|x_l-y|^{n-\beta}}dS_y\leqslant M\|\rho\|_\infty(R(N))^{\alpha+\beta+2-n}$$

при $\beta<n-2$;

$$|r_2^N(x_l)|\leqslant M\|\rho\|_\infty(R(N))^\alpha|\ln R(N)|\quad\text{при}\quad\beta=n-2;$$
$$|r_2^N(x_l)|\leqslant M\|\rho\|_\infty(R(N))^\alpha\quad\text{при}\quad\beta>n-2.$$

Более того, принимая во внимание неравенства (3) и (5), имеем

$$|(\frac{1}{|x_l-y|^n}-\frac{1}{|x_l-x_j|^n})K(x_l,x_j)|\leqslant M\frac{|x_j-y|}{|x_l-y|^{1+\lambda}}.$$

Отсюда находим, что

$$|r_3^N(x_l)|\leqslant MR(N)\|\rho\|_\infty\int\limits_{S\backslash S_l}\frac{1}{|x_l-y|^{1+\lambda}}\,dS_y\leqslant M\|\rho\|_\infty R(N)\quad\text{при}\quad\lambda<1;$$

$$|r_3^N(x_l)| \leqslant M\|\rho\|_\infty R(N)|\ln R(N)| \quad \text{при} \quad \lambda = 1;$$
$$|r_3^N(x_l)| \leqslant M\|\rho\|_\infty (R(N))^{2-\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda > 1.$$

Очевидно, что

$$|r_4^N(x_l)| \leqslant M\omega(\rho, R(N)) \int\limits_{S\setminus S_l} \frac{1}{|x_l - y|^\lambda}\, dS_y \leqslant M\omega(\rho, R(N)).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $r_1^N(x_l)$, $r_2^N(x_l)$, $r_3^N(x_l)$ и $r_4^N(x_l)$, получаем доказательство теоремы. □

3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Пусть $\mathbb{C}^N$ — пространство N-мерных векторов $z^N = (z_1^N, z_2^N, \ldots, z_N^N)$, $z_l^N \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1, N}$, с нормой $\|z^N\| = \max\limits_{l=\overline{1,N}} |z_l^N|$, а $C(S)$ — пространство непрерывных функций на S с нормой $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in S} |f(x)|$. Для $z^N \in \mathbb{C}^N$ положим

$$A^N z^N = (A_1^N z^N,\ A_2^N z^N, \ldots, A_N^N z^N), \quad A_l^N z^N = \sum_{j=1}^N a_{lj} z_j^N, \quad l = \overline{1, N}.$$

Используя кубатурную формулу (7), ИУ (1) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N — приближенных значений $\rho(x_l)$, $l = \overline{1, N}$, которую запишем в виде

$$z^N + A^N z^N = f^N, \tag{8}$$

где $f^N = p^N f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, $f_l = f(x_l)$, $l = \overline{1, N}$, $p^N : C(S) \to \mathbb{C}^N$ — оператор простого сноса и $A^N \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ (здесь через $\mathscr{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ обозначено пространство линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathbb{C}^N$ в пространство $\mathbb{C}^N$).

Обоснование метода коллокации получим из теоремы Г. М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений [13]. Для ее формулировки приведем в обозначениях работы [13] необходимые определения и утверждения.

Определение 1 ([13]). Систему $Q = \{q^N\}$ операторов $q^N : C(S) \to \mathbb{C}^N$ будем называть *связывающей* для $C(S)$ и $\mathbb{C}^N$, если:

1) $\|q^N\varphi\| \to \|\varphi\|_\infty$ при $N \to \infty$ для всех $\varphi \in C(S)$;

2) $\|q^N(a\varphi + a'\varphi') - (aq^N\varphi + a'q^N\varphi')\| \to 0$ при $N \to \infty$ для всех $\varphi, \varphi' \in C(S)$, $a, a' \in \mathbb{C}$.

Определение 2 ([13]). Последовательность $\{\varphi_N\}$ элементов $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$ *Q-сходится к $\varphi \in C(S)$*, если $\|\varphi_N - q^N\varphi\| \to 0$ при $N \to \infty$. При этом будем писать $\varphi_N \xrightarrow{Q} \varphi$.

Определение 3 ([13]). Последовательность $\{\varphi_N\}$ элементов $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$ *Q-компактна*, если любая ее подпоследовательность $\{\varphi_{N_m}\}$ содержит Q-сходящуюся подпоследовательность $\{\varphi_{N_{m_k}}\}$.

Предложение 1 ([13]). *Пусть $q^N : C(S) \to \mathbb{C}^N$ линейны и ограничены. Тогда следующие условия равносильны:*

1) последовательность $\{\varphi_N\}$ Q-компактна и множество ее Q-предельных точек компактно в $C(S)$;

2) *существует относительно компактная последовательность* $\{\varphi^{(N)}\} \subset C(S)$ *такая, что* $\|\varphi_N - q^N\varphi^{(N)}\| \to 0$ *при* $N \to \infty$.

Определение 4 ([13]). Последовательность операторов $B^N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ *QQ-сходится* к оператору $B : C(S) \to C(S)$, если для любой Q-сходящейся последовательности $\{\varphi_N\}$ имеем $\varphi_N \xrightarrow{Q} \varphi \Rightarrow B^N\varphi_N \xrightarrow{Q} B\varphi$. При этом будем писать $B^N \xrightarrow{QQ} B$.

Определение 5 ([13]). Последовательность операторов $B^N \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ *компактно сходится к оператору* $B \in \mathscr{L}(C(S), C(S))$, если $B^N \xrightarrow{QQ} B$ и выполнено следующее условие компактности: $\varphi_N \in \mathbb{C}^N$, $\|\varphi_N\| \leqslant M \Rightarrow \{B^N\varphi_N\}$, Q-компактна.

Теорема 2 ([13]). *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $\operatorname{Ker}(I + B) = \{0\}$, *где* I *— единичный оператор в пространстве* $C(S)$;
2) $I^N + B^N$ *фредгольмовы операторы с нулевым индексом, где* I^N *— единичный оператор в пространстве* $\mathbb{C}^N$;
3) $\psi_N \xrightarrow{Q} \psi$, $\psi_N \in \mathbb{C}^N$, $\psi \in C(S)$;
4) $B^N \to B$ *компактно.*

Тогда уравнение $(I + B)\varphi = \psi$ *имеет единственное решение* $\tilde{\varphi} \in C(S)$, *уравнение* $(I^N + B^N)\varphi_N = \psi_N$ *имеет единственное решение* $\tilde{\varphi}_N \in \mathbb{C}^N$ *и* $\tilde{\varphi}_N \xrightarrow{Q} \tilde{\varphi}$ *с оценкой*

$$c_1\|(I^N + B^N)q^N\tilde{\varphi} - \psi_N\| \leqslant \|\tilde{\varphi}_N - q^N\tilde{\varphi}\| \leqslant c_2\|(I^N + B^N)q^N\tilde{\varphi} - \psi_N\|,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sup\limits_N \|I^N + B^N\|} > 0, \quad c_2 = \sup_N \|(I^N + B^N)^{-1}\| < +\infty.$$

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Ker}(I + A) = \{0\}$, *функция* $K(x, y)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (6) *и существует натуральное число* n_0 *такое, что*

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leqslant M \sum_{j=1}^{n_0} |x' - x''|^{a_j} |x' - y|^{b_j} |x'' - y|^{c_j}, \quad \forall\, x', x'', y \in S, \tag{9}$$

где $0 < a_j \leqslant 1$, $b_j \geqslant 0$, $c_j \geqslant 0$ *и* $a_j + b_j + c_j > n - 2$, $j = \overline{1, n_0}$. *Тогда уравнения* (1) *и* (8) *имеют единственные решения* $\rho_* \in C(S)$ *и* $z_*^N \in \mathbb{C}^N$ *соответственно, причем* $\|z_*^N - p^N\rho_*\| \to 0$ *при* $N \to \infty$ *с оценкой*

$$\|z_*^N - p^N\rho_*\| \leqslant M[\|f\|_\infty (R(N))^\eta |\ln R(N)| + \omega(f, R(N))],$$

где $\eta = \min\{\gamma, c\}$, $c = \min\{a, 2-\lambda, a+b+2-n\}$, $a = \min\limits_{j=\overline{1,n_0}} a_j$, $b = \min\limits_{j=\overline{1,n_0}} \{a_j+b_j+c_j\} - a$.

Доказательство. Очевидно, что операторы $I^N + A^N$ фредгольмовы с нулевым индексом и система операторов простого сноса $P = \{p^N\}$ является связывающей для пространств $C(S)$ и $\mathbb{C}^N$. Тогда $f^N \xrightarrow{P} f$ и из теоремы 1 получаем, что $I^N + A^N \xrightarrow{PP} I + A$. По определению 5 осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1 равносильно следующему условию: для всех $\{z^N\}, z^N \in \mathbb{C}^N, \|z^N\| \leqslant M$, существует относительно компактная последовательность $\{A_N z^N\} \subset C(S)$, такая, что

$$\|A^N z^N - p^N(A_N z^N)\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В качестве $\{A_N z^N\}$ выберем последовательность

$$(A_N z^N)(x) = \sum_{j=1}^{N} z_j^N \int\limits_{S_j} \frac{K(x,y)}{|x-y|^n}\, dS_y, \quad x \in S.$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in S$, такие, что $|x' - x''| = \delta < d/2$. Очевидно, что

$$|(A_N z^N)(x') - (A_N z^N)(x'')| \leqslant \|z^N\| \int\limits_S \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} - \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y \leqslant$$

$$\leqslant \|z^N\| \int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} \right| dS_y + \|z^N\| \int\limits_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y +$$

$$+ \|z^N\| \int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y + \|z^N\| \int\limits_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} \right| dS_y +$$

$$+ \|z^N\| \int\limits_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \left(\frac{1}{|x'-y|^n} - \frac{1}{|x''-y|^n} \right) K(x',y) \right| dS_y +$$

$$+ \|z^N\| \int\limits_{S_d(x') \setminus (S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))} \left| \frac{K(x',y) - K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y +$$

$$+ \|z^N\| \int\limits_{S \setminus S_d(x')} \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} - \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y.$$

Используя (3) и формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим:

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} \right| dS_y \leqslant M \int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x'-y|^\lambda}\, dS_y \leqslant M \delta^{2-\lambda},$$

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y \leqslant M \delta^{2-\lambda}.$$

Кроме того, принимая во внимание неравенства $|x'' - y| \geqslant \delta/2$ для всех $y \in S_{\delta/2}(x')$ и $|x' - y| \geqslant \delta/2$ для всех $y \in S_{\delta/2}(x'')$, имеем:

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \left| \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n} \right| dS_y \leqslant M \int\limits_{S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x''-y|^\lambda} dS_y \leqslant M \left(\frac{2}{\delta} \right)^\lambda \operatorname{mes}(S_{\delta/2}(x')) \leqslant M \delta^{2-\lambda},$$

$$\int\limits_{S_{\delta/2}(x'')} \left| \frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} \right| dS_y \leqslant M \delta^{2-\lambda}.$$

Так как

$$|x' - y| \leqslant 3|x'' - y| \quad \text{и} \quad |x'' - y| \leqslant 3|x' - y| \tag{10}$$

для всех $y \in S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x''))$, то, учитывая неравенство (3), получаем

$$\left|\left(\frac{1}{|x'-y|^n} - \frac{1}{|x''-y|^n}\right) K(x',y)\right| \leqslant \frac{M\delta}{|x'-y|^{1+\lambda}}, \quad \forall\ y \in S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x'')).$$

Отсюда находим, что

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\left(\frac{1}{|x'-y|^n} - \frac{1}{|x''-y|^n}\right) K(x',y)\right| dS_y \leqslant$$

$$M\delta \int\limits_{S_d(x')\backslash S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x'-y|^{1+\lambda}} dS_y \leqslant M\delta \quad \text{при} \quad 0<\lambda<1;$$

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\left(\frac{1}{|x'-y|^n} - \frac{1}{|x''-y|^n}\right) K(x',y)\right| dS_y \leqslant M\delta|\ln\delta| \quad \text{при} \quad \lambda=1;$$

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\left(\frac{1}{|x'-y|^n} - \frac{1}{|x''-y|^n}\right) K(x',y)\right| dS_y \leqslant M\delta^{2-\lambda} \quad \text{при} \quad 1<\lambda<2.$$

Принимая во внимание (9) и (10), имеем

$$|K(x',y) - K(x'',y)| \leqslant M\delta^a|x'-y|^b, \quad \forall\ y \in S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x') \cup S_{\delta/2}(x'')).$$

Тогда получаем, что

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\frac{K(x',y)-K(x'',y)}{|x''-y|^n}\right| dS_y \leqslant$$

$$M\delta^a \int\limits_{S_d(x')\backslash S_{\delta/2}(x')} \frac{1}{|x'-y|^{n-b}} dS_y \leqslant M\delta^a \quad \text{при} \quad b>n-2;$$

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\frac{K(x',y)-K(x'',y)}{|x''-y|^n}\right| dS_y \leqslant M\delta^a|\ln\delta| \quad \text{при} \quad b=n-2;$$

$$\int\limits_{S_d(x')\backslash(S_{\delta/2}(x')\cup S_{\delta/2}(x''))} \left|\frac{K(x',y)-K(x'',y)}{|x''-y|^n}\right| dS_y \leqslant M\delta^{a+b+2-n} \quad \text{при} \quad b<n-2.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_{S\backslash S_d(x')} \left|\frac{K(x',y)}{|x'-y|^n} - \frac{K(x'',y)}{|x''-y|^n}\right| dS_y \leqslant M\delta^a.$$

Суммируя полученные выше оценки, получим

$$|(A_N z^N)(x') - (A_N z^N)(x'')| \leqslant M\|z^N\|\delta^c|\ln\delta|, \tag{11}$$

а, значит, $\{A_N z^N\} \subset C(S)$. Относительная компактность последовательности $\{A_N z^N\}$ следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность вытекает непосредственно из условия $\|z^N\| \leqslant M$, а равностепенная непрерывность следует из оценки (11). Кроме того, поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, получаем

$$\|A^N z^N - p^N(A_N z^N)\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

В результате получаем, что выполняются все условии теоремы 2. Тогда уравнения (1) и (8) имеют единственные решения $\rho_* \in C(S)$ и $z_*^N \in \mathbb{C}^N$ соответственно, причем

$$c_1\delta_N \leqslant \|z_*^N - p^N\rho_*\| \leqslant c_2\delta_N,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sup\limits_N \|I^N + A^N\|} > 0, \quad c_2 = \sup_N \|(I^N + A^N)^{-1}\| < +\infty,$$

$$\delta_N = \max_{l=\overline{1,N}} |A_l^N(p^N\rho_*) - (A\rho_*)(x_l)|.$$

По теореме 1

$$\delta_N \leqslant M[\|\rho_*\|_\infty (R(N))^\gamma |\ln R(N)| + \omega(\rho_*, R(N))].$$

Очевидно, что

$$\omega(\rho_*, R(N)) = \omega(f - A\rho_*, R(N)) \leqslant \omega(f, R(N)) + \omega(A\rho_*, R(N)).$$

Поступая точно так же, как и при доказательстве оценки (11), нетрудно показать, что

$$|(A\rho_*)(x') - (A\rho_*)(x'')| \leqslant M\|\rho_*\|_\infty |x' - x''|^c |\ln|x' - x''||, \quad \forall\, x', x'' \in S,$$

а значит,

$$\omega(A\rho_*, R(N)) \leqslant M\|\rho_*\|_\infty (R(N))^c |\ln R(N)|.$$

Кроме того, учитывая

$$\|\rho_*\|_\infty = \|(I + A)^{-1} f\|_\infty \leqslant \|(I + A)^{-1}\| \|f\|_\infty,$$

получаем доказательство теоремы. □

Замечание 1. Используя теорему 3, также можно исследовать приближенное решение некоторых классов ИУ более общего вида

$$\rho + A\rho = Gg,$$

где G — некоторый ограниченный оператор, а g — заданная функция на S, причем $Gg \in C(S)$. Действительно, в теореме 3 достаточно взять $f = Gg$.

Пример 2. Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}) \bigcap C(\mathbb{R}^3 \backslash D)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + \chi^2 u = 0$ в $\mathbb{R}^3 \backslash \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию $u(x) = f(x)$ на S, где $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S, Δ — оператор Лапласа, χ — волновое число, причем $Im\chi \geqslant 0$, а f — заданная непрерывная функция на S.

Разыскивая решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в виде комбинации простого и двойного слоев

$$u(x) = \int\limits_S \left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} - i\mu \Phi(x,y) \right) \rho(y)\, dS_y,$$

в работе [14, с. 104] показано, что плотность $\rho(x)$ является решением однозначно разрешимого ИУ

$$\rho + B\rho = 2f, \tag{12}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\vec{n}(y)$ — единичная внешняя нормаль в точке $y \in S$, $\Phi(x,y) = e^{i\chi|x-y|}/(4\pi|x-y|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $\mu \neq 0$ — произвольное вещественное число, причем $\mu \operatorname{Re} \chi \geqslant 0$,

$$(B\rho)(x) = 2\int\limits_S \left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} - i\mu \Phi(x,y) \right) \rho(y)\, dS_y, \quad x \in S.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(B\rho)(x) = \int\limits_S \frac{K(x,y)}{|x-y|^3} \rho(y)\, dS_y,$$

где $K(x,y) = -\frac{1}{2\pi} e^{i\chi|x-y|} (i\mu|x-y|^2 + (\overrightarrow{xy}, \vec{n}(y))(1 - i\chi|x-y|))$.

Очевидно, что для любых $x, y, y' \in S$

$$|K(x,y)| \leqslant M|x-y|^2,$$
$$|K(x,y) - K(x,y')| \leqslant M(|y-y'|^2 + |y-y'||x-y| + |y-y'|\,|x-y'|).$$

Тогда, применяя теорему 1, получаем, что выражение

$$B^N(x_l) = \sum_{j=1}^N b_{lj} \rho(x_j) \tag{13}$$

в точках x_l, $l = \overline{1,N}$, является кубатурной формулой для интеграла $(B\rho)(x)$, где

$$b_{lj} = 0 \quad \text{при} \quad l = j,$$
$$b_{lj} = 2\left(\frac{\partial \Phi(x_l, x_j)}{\partial \vec{n}(x_j)} - i\mu \Phi(x_l, x_j) \right) \operatorname{mes} S_j \quad \text{при} \quad l \neq j,$$

причем

$$\max_{l=\overline{1,N}} |(B\rho)(x_l) - B^N(x_l)| \leqslant M(\|\rho\|_\infty R(N)|\ln R(N)| + \omega(\rho, R(N))).$$

Используя кубатурную формулу (13), ИУ (12) заменяем системой алгебраических уравнений относительно w_l^N — приближенных значений $\rho(x_l)$, $l = \overline{1,N}$, которую запишем в виде

$$w^N + B^N w^N = 2f^N, \tag{14}$$

где

$$B^N w^N = \left(B_1^N w^N, B_2^N w^N, \ldots, B_N^N w^N \right), \quad B_l^N w^N = \sum_{j=1}^N b_{lj} w_j^N, \quad l = \overline{1,N}.$$

Нетрудно показать, что для любых $x', x'', y \in S$

$$|K(x', y) - K(x'', y)| \leqslant M(|x' - x''|^2 + |x' - x''||y - x'| + |x' - x''||y - x''|).$$

Тогда по теореме 3 при любом значении волнового числа χ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Im}\chi \geqslant 0$, уравнения (12) и (14) имеют единственные решения $\rho_* \in C(S)$ и $w_*^N = (w_1^*, w_2^*, ..., w_N^*) \in \mathbb{C}^N$ соответственно, причем $\|w_*^N - p^N \rho_*\| \to 0$ при $N \to \infty$ с оценкой

$$\|w_*^N - p^N \rho_*\| \leqslant M(\|f\|_\infty R(N)|\ln R(N)| + \omega(f, R(N))).$$

Можно показать, что последовательность

$$u_N(x_0) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \Phi(x_0, x_j)}{\partial \vec{n}(x_j)} - i\mu \Phi(x_0, x_j) \right) w_j^* \operatorname{mes} S_j, \quad x_0 \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D},$$

сходится к решению $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке x_0, причем

$$|u_N(x_0) - u(x_0)| \leqslant M(\|f\|_\infty R(N)|\ln R(N)| + \omega(f, R(N))).$$

Пример 3. В работе [14, с. 116] показано, что если функция $u(x)$ имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приводится к разрешимому единственным образом ИУ

$$\rho + \tilde{A}\rho = \tilde{G}f, \tag{15}$$

где

$$(\tilde{A}\rho)(x) = 2\int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(x)} \rho(y)\, dS_y - 2i\eta \int_S \Phi(x, y)\rho(y)\, dS_y, \quad x \in S,$$

$$(\tilde{G}f)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y)\, dS_y - i\eta \left(2\int_S \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} f(y)\, dS_y - f(x) \right), \quad x \in S,$$

а $\eta \neq 0$ — произвольное действительное число, причем $\eta Re\chi \geqslant 0$. Известно, что внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца можно привести к различным граничным интегральным уравнениям. Однако уравнение (15) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на S. При этом функция

$$u(x) = \int_S \left\{ f(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} - \rho(y)\Phi(x, y) \right\} dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. Кроме того, решение уравнения (15) является решением уравнения моментов (см. [14, с. 118]). Отметим, что, принимая во внимание замечание 1 и доказанные свойства в работе [15] для оператора, порожденного нормальной производной аккустического потенциала двойного слоя, так же, как и в примере 2, можно исследовать приближенное решение ИУ (15) методом коллокации.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке «Университетского гранта» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (проект № ADNSU-2018-1-01).

Библиографический список

1. *Abdullayev F. A., Khalilov E. H.* Constructive method for solving the external Neumann boundary-value problem for the Helmholtz equation // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2018. Vol. 44, № 1. P. 62–69.
2. *Bremer J., Gimbutas Z.* A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces // J. Comput. Phys. 2012. Vol. 231, № 14. P. 4885–4903. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.003
3. *Gonzalez O., Li J.* A convergence theorem for a class of Nyström methods for weakly singular integral equations on surfaces in $\mathbb{R}^3$ // Mathematics of Computation. 2015. Vol. 84, № 292. P. 675–714.
4. *Graham I. G., Sloan I. H.* Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in $\mathbb{R}^3$ // Numer. Math. 2002. Vol. 92, iss. 2. P. 289–323. DOI: https://doi.org/10.1007/s002110100343
5. *Harris P. J., Chen K.* On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem // J. Comput. Appl. Math. 2003. Vol. 156, iss. 2. P. 303–318. DOI: https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00918-4
6. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Comput. Modelling. 1991. Vol. 15, iss. 3–5. P. 229–243. DOI: https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I
7. *Cai T.* A fast solver for a hypersingular boundary integral equation // Appl. Numer. Math. 2009. Vol. 59. P.1960–1969. DOI: https://doi.org/10.1016/ j.apnum.2009.02.005
8. *Farina L., Martinc P. A., Péron V.* Hypersingular integral equations over a disc: Convergence of a spectral method and connection with Tranter's method // J. Comput. Appl. Math. 2014. Vol. 269. P. 118–131. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.03.014
9. *Халилов Э. Г.* Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 544–555. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118040106
10. *Kress R.* A collocation method for a hypersingular boundary integral equation via trigonometric differentiation // J. Integral Equations Applications. 2014. Vol. 26, № 2. P. 197–213. DOI: https://doi.org/10.1216/JIE-2014-26-2-19
11. *Лифанов И. К., Ставцев С. Л.* Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1256–1270.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
13. *Вайникко Г. М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 16. М. : ВИНИТИ, 1979. С. 5–53.
14. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
15. *Халилов Э. Г.* Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 690–700.

Образец для цитирования:

Халилов Э. Г. О приближенном решении одного класса слабо сингулярных интегральных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 310–325. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325

On the Approximate Solution of a Class of Weakly Singular Integral Equations

E. H. Khalilov

Elnur H. Khalilov, https://orcid.org/0000-0001-7603-5072, Azerbaijan State Oil and Industry University, 20 Azadlig Ave., Baku AZ1010, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

The work is devoted to the study of the solution of one class of weakly singular surface integral equations of the second kind. First, a Lyapunov surface is partitioned into "regular" elementary parts, and then a cubature formula for one class of weakly singular surface integrals is constructed at the control points. Using the constructed cubature formula, the considered integral equation is replaced by a system of algebraic equations. As a result, under the additional conditions imposed on the kernel of the integral, it is proved that the considered integral equation and the resulting system of algebraic equations have unique solutions, and the solution of the system of algebraic equations converges to the value of the solution of the integral equation at the control points. Moreover, using these results, we substantiate the collocation method for various integral equations of the external Dirichlet boundary-value problem for the Helmholtz equation.

Keywords: collocation method, integral equations of the second kind, cubature formula, weakly singular surface integral, boundary-value problems for the Helmholtz equation.

Received: 04.06.2019 / Accepted: 11.09.2019 / Published: 31.08.2020

Acknowledgements: This work was supported by the "University Grant" of the ASOIU (proect No. ADNSU-2018-1-01).

References

1. Abdullayev F. A., Khalilov E. H. Constructive method for solving the external Neumann boundary-value problem for the Helmholtz equation. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 62–69.
2. Bremer J., Gimbutas Z. A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces. *J. Comput. Phys.*, 2012, vol. 231, no. 14, pp. 4885–4903. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.003
3. Gonzalez O., Li J. A convergence theorem for a class of Nyström methods for weakly singular integral equations on surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Mathematics of Computation*, 2015, vol. 84, no. 292, pp. 675–714.
4. Graham I. G., Sloan I. H. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 2002, vol. 92, iss. 2, pp. 289–323. DOI: https://doi.org/10.1007/s002110100343
5. Harris P. J., Chen K. On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three-dimensional exterior Helmholtz problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, vol. 156, iss. 2, pp. 303–318. DOI: https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00918-4
6. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering. *Math. Comput. Modelling*, 1991, vol. 15, iss. 3–5, pp. 229–243. DOI: https://doi.org/10.1016/0895-7177(91)90068-I
7. Cai T. A fast solver for a hypersingular boundary integral equation. *Appl. Numer. Math.*, 2009, vol. 59, pp.1960–1969. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.02.005

8. Farina L., Martinc P. A., Péron V. Hypersingular integral equations over a disc: Convergence of a spectral method and connection with Tranter's method. *J. Comput. Appl. Math.*, 2014, vol. 269, pp. 118–131. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.03.014
9. Khalilov E. H. Constructive Method for Solving a Boundary Value Problem with Impedance Boundary Condition for the Helmholtz Equation. *Differ. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 539–550. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118040109
10. Kress R. A collocation method for a hypersingular boundary integral equation via trigonometric differentiation. *J. Integral Equations Applications*, 2014, vol. 26, no. 2, pp. 197–213. DOI: https://doi.org/10.1216/JIE-2014-26-2-19
11. Lifanov I. K., Stavtsev S. L. Integral equations and sound propagation in a shallow sea. *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, iss. 9, pp. 1330–1344. DOI: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0012-x
12. Vladimirov V. S. *Equations of mathematical physics*. New York, Marcel Dekker Inc., 1971. 426 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 527 p.).
13. Vainikko G. M. Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 15, iss. 6, pp. 675–705. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01377042
14. Colton D. L., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. John Wiley and Sons, 1983. 271 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 311 p.).
15. Khalilov E. H. Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, iss 3, pp. 564–573. DOI: https://doi.org/10.1134/S0037446614030173

Cite this article as:

Khalilov E. H. On the Approximate Solution of a Class of Weakly Singular Integral Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 310–325 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-310-325