УДК 517.54

Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка

Р. Б. Салимов, Э. Н. Хасанова

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1, salimov.rsb@gmail.com

Хасанова Энже Назиповна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1, enkarabasheva@bk.ru

Рассматривается задача об определении аналитической в ограниченной действительной осью верхней части комплексной плоскости по краевому условию на всей действительной оси, согласно которому реальная часть произведения заданной на действительной оси комплексной функции, называемой коэффициентом краевого условия, и граничных значений искомой аналитической функции на этой оси равна нулю всюду на действительной оси. Предполагается, что аргумент коэффициента краевого условия обращается в бесконечность, как та или иная степень логарифма модуля координаты точки оси при неограниченном удалении этой точки от начала отсчета в том или ином направлении. Выводится формула, определяющая аналитическую в верхней полуплоскости функцию, мнимая часть которой при стремлении координаты точки оси положительной полуоси к бесконечности является бесконечно большой того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия. Далее выводится аналогичная аналитическая функция, мнимая часть которой обращается в бесконечность того же порядка, что и аргумент коэффициента краевого условия, когда точки отрицательной действительной оси удаляются в бесконечность. Использование указанных двух функций позволяет устранить бесконечный разрыв аргумента коэффициента краевого условия. На основе приемов, аналогичных применяемым Ф. Д. Гаховым, задача приводится к задаче с конечным индексом. Для решения последней задачи используется метод Ф. Д. Гахова. Найденное решение зависит от произвольной целой функции нулевого порядка, модуль которой подчинен дополнительному условию.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, аналитическая функция, бесконечный индекс, логарифмический порядок.

Поступила в редакцию: 16.04.2019 / Принята: 15.03.2020 / Опубликована: 31.08.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах [1, 2] дано решение задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости путем сведения ее к соответствующей задаче Римана методом Н. И. Мусхелишвили [3, с. 130–155]. При решении задачи Римана с бесконечным индексом и краевым условием на действительной оси авторами используются результаты, аналогичные разработанным ранее Н. В. Говоровым [4].

В статье [5] решение задачи Гильберта с бесконечным индексом получено непосредственно (без использования вспомогательного решения задачи Римана с бесконечным индексом) путем обобщения на рассматриваемый случай метода Ф. Д. Гахова [6, с. 273], позволяющего задачу с бесконечным индексом привести к соответствующей задаче с конечным индексом.

В работе [7] при решении однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка путем перехода к задаче с конечным индексом использованы результаты П. Г. Юрова [8], определяющие поведение на бесконечности интеграла типа Коши, взятого по бесконечной полупрямой, в которой плотность интеграла имеет особенность логарифмического порядка.

В настоящей статье однородная задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка с краевым условием на действительной оси решается путем построения двух функций, аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях с мнимыми частями, имеющими нужное поведение на бесконечности в точках действительной оси, с помощью которых осуществляется переход к краевому условию с конечным индексом (одна из них была использована в работе [9]).

Эти две функции на бесконечности имеют очевидное поведение, что облегчает исследование задачи и может быть использовано при построении частного решения соответствующей неоднородной задачи Гильберта без приведения последней к задаче Римана.

Пусть L — действительная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую ограниченную в области D, непрерывно продолжимую во все точки контура L и удовлетворяющую краевому условию

$$a(t)\operatorname{Re}\Phi(t) - b(t)\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — заданные на L действительные непрерывные функции, $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$ всюду на L, включая бесконечно удаленную точку. Обозначая $G(t) = a(t) - ib(t)$, условие (1) запишем так:

$$\operatorname{Re}[e^{-i\arg G(t)}\Phi(t)] = 0, \quad t \in L, \tag{2}$$

и будем считать, что имеют место представления

$$\arg G(t) = \begin{cases} \nu(t) + \nu^-(\ln t)^\alpha, & t > 1, \\ \nu(t), & t \in [-1, 1], \\ \nu(t) + \nu^+(\ln|t|)^{\alpha^*}, & t < -1, \end{cases} \tag{3}$$

где α, α^*, ν^-, ν^+ — действительные числа, $\alpha > 0$, $\alpha^* > 0$, $(\ln t)^\alpha > 0$, при $t > 1$, $(\ln|t|)^{\alpha^*} > 0$, при $t < -1$, $\nu(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера H всюду на L, включая бесконечно удаленную точку ($\nu(t) \in H, t \in L$). Поэтому $\nu(-\infty) = \nu(+\infty)$.

По аналогии со случаем задачи с конечным индексом, под индексом задачи (2) с условиями (3) нужно понимать величину $\pi^{-1}\overline{\lim}[\arg G(t_1) - \arg G(t_2)]$, при $t_1 \to +\infty$, $t_2 \to -\infty$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Положим α — действительное положительное число. Для $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, где $(\ln z - i\pi)^\alpha$ будем рассматривать как непрерывную однозначную в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ аналитическую функцию, которая при $z = |x|e^i\pi$, $|x| > 1$ принимает положительное значение $(\ln|x|)^\alpha$, $(\arg(\ln|x|)^\alpha = 0)$, и $\arg(\ln z - i\pi)^\alpha \to 0$ при $z = x \to +\infty$.

Обозначим

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j > 0,$$

$$\binom{\alpha}{j} = 1, \quad j = 0,$$

где α — произвольное действительное число, j — целое число. Запишем [10, с. 302]

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j, \quad |z| < 1. \tag{4}$$

Для $z = x > 1$ имеем

$$(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^{\alpha+1}\left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1}, \tag{5}$$

считая, что $(\ln x)^{\alpha+1} > 0$, $\left(1 - \frac{i\pi}{\ln x}\right)^{\alpha+1} \to 1$ при $x \to +\infty$.

При $x > e^\pi$ второй множитель правой части последней формулы представим как сумму степенного ряда с учетом разложения, полученного из (4) заменой α на $\alpha+1$, и придем к соотношению

$$\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = (\ln x)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi(-1)^{j+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j}, \quad x > e^\pi. \tag{6}$$

Предположим, что $\alpha > 1$. Подберем целое число k так, чтобы было справедливо соотношение

$$-3 < \alpha - 2k \leqslant -1 \tag{7}$$

(когда $k \geqslant 2$). В разложении (6) выделим первые k слагаемых и запишем его так:

$$\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} = -\pi(\alpha+1)(\ln x)^\alpha + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\alpha+1}{2j+1} \pi^{2j+1}(-1)^{j+1}(\ln x)^{\alpha-2j} +$$
$$+ r_{\alpha-2k}(x,\alpha), \quad x > e^\pi, \tag{8}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k}\pi^{2k+1} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\alpha+1}{2j+1} (-1)^{j+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}. \tag{9}$$

В формуле (8) число α заменим на $\alpha - 2m$, число k на $k - m$, когда m принимает последовательно значения $1, 2, ..., k-1$, и получим

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1} \pi^{2(j-m)+1}(-1)^{j-m+1}(\ln x)^{j-2k} =$$

$$= \operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - r_{\alpha-2k}(x, \alpha-2m), \quad m=\overline{1,k-1}, \quad x > e^{\pi}, \tag{10}$$

где

$$r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m) = (\ln x)^{\alpha-2k}\pi^{2(k-m)+1}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1}(-1)^{j-m+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}. \tag{11}$$

Соотношения (10) представляют собой систему равенств, содержащих величины $(\ln x)^{\alpha-2j}$, $j=1,2,...,k-1$. Коэффициенты при этих величинах образуют треугольную матрицу $\|a_{mj}\|$, элементы которой $a_{mj}=0$ при $j<m$, $a_{mm}=(\alpha-2m+1)(-\pi)$, $m=\overline{1,k-1}$. Определитель этой матрицы равен

$$\Delta = -(\pi)^{k-1}\prod_{m=1}^{k-1}(\alpha-2m+1),$$

причем $\Delta \neq 0$, так как согласно (7) имеем $-3<\alpha-2k$ и $0<\alpha-2(k-1)+1$. Пусть A_{mj}– алгебраическое дополнение для элемента a_{mj} определителя Δ.

Из системы (10), используя формулы Крамера, запишем $(\ln x)^{\alpha-2j}$, $j=\overline{1,k-1}$, через правые части соотношений системы

$$(\ln x)^{\alpha-2j} = \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{k-1}A_{mj}\left[\operatorname{Im}(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1} - r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m)\right]$$

и подставим полученные выражения в формулу (8).

Обозначая

$$B_m = \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{k-1}A_{mj}\binom{\alpha+1}{2j+1}\pi^{2j+1}(-1)^{j+1},$$

получим

$$\operatorname{Im}\left[(\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1}\right] =$$
$$= -\pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha} + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \quad x > e^{\pi}, \tag{12}$$

где

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = r_{\alpha-2k}(x,\alpha) - \sum_{m=1}^{k-1}B_m r_{\alpha-2k}(x,\alpha-2m). \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$T_0(z) = (\ln x - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1}B_m(\ln x - i\pi)^{\alpha-2m+1}, \tag{14}$$

каждое слагаемое которой есть однозначная ветвь в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, определяемая, как указано выше. Мнимая часть этой функции при $z=|x|e^{i\pi}$, $|x|>1$, обращается в нуль, а при $z=x$, $x>e^{\pi}$, определяется формулой (12), где $R_{\alpha-2k}(x,\alpha)\to 0$ при $x\to+\infty$ в силу (7), (11), (13).

Функция $T_0(z)$ является вспомогательной в связи с тем, что она имеет особенность в точке $z = 0$. В связи с этим введем непрерывную, аналитическую и однозначную и во всех конечных точках полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ функцию

$$T(z) = (\ln(z+i) - i\pi)^{\alpha+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m (\ln(z+i) - i\pi)^{\alpha-2m+1}, \tag{15}$$

считая, что $T(z) = T_0(z+i),\ \operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Для $\operatorname{Im} T(x)$ при $x > e^{\pi}$ можно получить соотношение, схожее с формулой (12). Но легче использовать формулу (12), имея в виду $\operatorname{Im}(T(x) - T_0(x)) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Обозначим

$$V(z) = \operatorname{Im}(T(x) - T_0(x)). \tag{16}$$

Подставляя сюда выражения для $T_0(z)$ и $T(z)$, учитывая формулы (4), (5), при $z = x > e^{\pi}$ покажем, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} V(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{x}(\ln x)^{\alpha}, \quad x \to +\infty, \\ V'(x) &\sim -\frac{\alpha+1}{x^2}(\ln x)^{\alpha}, \quad x \to +\infty, \end{aligned} \tag{17}$$

а при $x \to -\infty$ выполняются соотношения, получаемые из предыдущих заменой $\ln x$ на $\ln|x|$. Используя вышесказанное поведение производной $V'(x)$ при $x \to +\infty$, опираясь на результаты [3, с. 127], получим, что $V(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера в окрестности точки $x = +\infty$ (дифференцируемая в любой конечной точке $x > e^{\pi}$). В том числе это верно и для окрестности точки $x = -\infty$.

Формулу (13) с учетом соотношений (9), (11) запишем так:

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = (\ln x)^{\alpha-2k} \sum_{j=k}^{\infty} N_j(\alpha,x)\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k}, \quad x > e^{\pi}, \tag{18}$$

где

$$N_j(\alpha,x) = (-1)^{j+1}\pi^{2k+1}\left[\binom{\alpha+1}{2j+1} - \sum_{m=1}^{k-1} B_m \binom{\alpha-2m+1}{2(j-m)+1}(-1)^m \pi^{-2m}\right]. \tag{19}$$

При $0 < \alpha \leqslant 1$ согласно (7) мы должны взять $k = 1$, и в предыдущих формулах будут отсутствовать конечные суммы, в которых $m = \overline{1, k-1}$; при $k = 1$ дополнительно будем иметь $r_{\alpha-2k}(x,\alpha) \equiv 0$, $R_{\alpha-2k}(x,\alpha) \equiv 0$, причем последние два равенства выполняются и в случае $\alpha = 2k - 1 > 1$.

В дальнейшем будем считать, что $\alpha - 2k < -1$, помня, что в полученных формулах при $\alpha = 2k-1$ надо положить $r_{\alpha-2k}(x,\alpha) \equiv 0$, $m = \overline{0, k-1}$.

В силу (18), (19) имеем

$$R_{\alpha-2k}(x,\alpha) = \frac{M(x,\alpha,k)}{(\ln x)^{\alpha-2k}}, \quad x > e^{\pi}, \tag{20}$$

где $M(x,\alpha,k)$ — сумма ряда правой части формулы (18) с производной

$$M'_x(x,\alpha,k) = -\frac{\pi}{x(\ln x)^2} \sum_{j=k+1}^{\infty} N_j(\alpha,x)(2j-2k)\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j-2k-1}.$$

С учетом (14), (18) формулу (12) представим так:

$$\operatorname{Im} T_0(x) = -\pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha} + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \quad x > e^{\pi}.$$

Беря в расчет (16), получим

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x) - \pi(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha} + R_{\alpha-2k}(x,\alpha), \quad x > e^{\pi}. \tag{21}$$

Для $z = x = |x|e^{i\pi} < 0$, $|x| > e^{\pi}$ по формуле (14) имеем $\operatorname{Im} T_0(x) = 0$, и с учетом (16) получим равенство

$$\operatorname{Im} T(x) = V(x), \quad x < -e^{\pi}. \tag{22}$$

На основании изложенного сформулируем лемму для случая $\alpha > 0$.

Лемма 1. *При вышеуказанных условиях для значений мнимой части аналитической в полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *функции* $T(z)$ *формулы* (15) *при* $z = x$, $|x| > e^{\pi}$ *справедливы представления* (21), (22), *в которых* $V(x)$ *— функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль на бесконечности,* $R_{\alpha-2k}(x,\alpha)$ *выражается формулой* (20) *и исчезает при натуральном числе* α.

Пусть α^* — действительное положительное число. Под $(\ln z)^{\alpha^*}$, когда $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi \leqslant \arg z < 0$, будем понимать непрерывную однозначную в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ функцию, которая при $z = x > 1$ принимает положительное значение $(\ln z)^{\alpha^*}$, $(\arg(\ln z)^{\alpha^*} = 0)$, и при $z = |x|e^{-i\pi}$, $|x| > 1$, $\arg(\ln|x| - i\pi)^{\alpha^*} \to 0$ при $|x| \to= \infty$.

Здесь при $x < -e^{\pi}$, т. е. $|x| > e^{\pi}$ для $z = |x|e^{-i\pi}$, и $(\ln z)^{\alpha^*+1} = (\ln|x| - i\pi)^{\alpha^*+1}$ согласно формуле (6) имеем

$$\operatorname{Im}(\ln|x| - i\pi)^{\alpha^*+1} = (\ln|x|)^{\alpha^*}\sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha^*+1}{2j+1}\pi(-1)^{j+1}\left(\frac{\pi}{\ln x}\right)^{2j}.$$

Считая пока $\alpha^* > 1$, выберем целое число k^* так, чтобы имело место соотношение (когда $k^* \geqslant 2$)

$$-3 < \alpha^* - 2k^* \leqslant -1. \tag{23}$$

Отсюда ясно, что в полученных на основании (6) формулах, включая (13), величины α, k, x в случае $x < -e^{\pi}$ можно заменить соответственно на α^*, k^*, $|x|^*$.

При этом определитель системы, получаемой из (10), с элементами a^*_{mj} будет равен

$$\Delta^* = -(\pi)^{k^*-1}\prod_{m=1}^{k^*-1}(\alpha^* - 2m + 1),$$

причем

$$a^*_{mj} = 0 \text{ при } j < m, \quad a^*_{mm} = (\alpha^* - 2m + 1)(-\pi), \quad m = \overline{1, k^* - 1}.$$

По значениям A^*_{mj} — алгебраического дополнения для a^*_{mj}, вычисляется

$$B^*_m = \frac{1}{\Delta^*}\sum_{m=1}^{k^*-1} A^*_{mj}\binom{\alpha^*+1}{2j+1}\pi^{2j+1}(-1)^{j+1}.$$

При вышеуказанной замене из (12) получим

$$\operatorname{Im}\left[\left(\ln(|x|e^{-2\pi})\right)^{\alpha^*+1}-\sum_{m=1}^{k^*-1}B_m^*\left(\ln(|x|e^{-2\pi})\right)^{\alpha^*-2m+1}\right]=$$
$$=-\pi(\alpha^*+1)(\ln|x|)^*+R_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*),\quad x<-e^{\pi},\tag{24}$$

где

$$R_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*)=r_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*)-\sum_{m=1}^{k^*-1}B_m^*r_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*-2m).\tag{25}$$

В формуле (24) выражение в квадратных скобках левой части есть значение при $z=|x|e^{-i\pi}$ функции

$$T_0^*(z)=(\ln z)^{\alpha^*+1}-\sum_{m=1}^{k^*-1}B_m^*(\ln z)^{\alpha^*-2m+1},\tag{26}$$

каждое слагаемое которой является однозначной непрерывной ветвью в полуплоскости $\operatorname{Im}z<0$, определяемой, как указано выше.

Заменяя в формуле (26) z на $z-i$, получим функцию

$$T_0^*(z)=(\ln(z-i))^{\alpha^*+1}-\sum_{m=1}^{k^*-1}B_m^*(\ln(z-i))^{\alpha^*-2m+1},\tag{27}$$

непрерывную аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im}z\leqslant 0$ с единственной особой точкой $z=\infty$.

Введем в рассмотрение функцию

$$V^*(z)=\operatorname{Im}(T^*(z)-T_0^*(z)),\tag{28}$$

значения которой $V^*(x)$ на действительной оси в окрестности точки $x=\infty$ обладают теми же свойствами, что и $V(x)$ (при $x<-e^{\pi}$ и $x>e^{\pi}$).

На основании формул (18)–(20) получаем

$$R_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*)=\frac{M^*(|x|,\alpha^*,k^*)}{(\ln|x|)^{-\alpha^*+2k^*}},\quad x<-e^{\pi},$$

где

$$M^*(|x|,\alpha^*,k^*)=\sum_{j=k^*}^{\infty}N_j^*(\alpha^*,k^*)\left(\frac{\pi}{\ln|x|}\right)^{2j-2k^*-1},$$
$$M_{|x|}^{*\prime}(|x|,\alpha^*,k^*)=-\frac{\pi}{|x|(\ln|x|)^2}\sum_{j=k^*+1}^{\infty}N_j^*(\alpha^*,k^*)(2j-2k^*)\left(\frac{\pi}{\ln|x|}\right)^{2j-2k^*-1},$$

$N_j^*(\alpha^*,k^*)$ определяется формулой, получаемой из (19) заменой N_j, k, α, B_m соответственно на N_j^*, k^*, α^*, B_m^*. При $0<\alpha^*\leqslant 1$ в силу (23) здесь и в формулах (24), (25) будут отсутствовать конечные суммы, в которых $m=\overline{1,k^*-1}$; при $k^*=1$ дополнительно будем иметь $r_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*)\equiv 0$, $R_{\alpha^*-2k^*}(|x|,\alpha^*)\equiv 0$, причем последние два равенства выполняются и в случае $\alpha^*=2k^*-1>1$.

В дальнейшем будем считать, что $\alpha^* - 2k^* < -1$, учитывая, что при $\alpha^* = 2k^* - 1$ формулы упростятся.

При $z = x, x > 1$ согласно (26) имеем $\operatorname{Im} T_0^*(x) = 0$, поэтому с учетом (28) получаем

$$\operatorname{Im} T^*(x) = V^*(x), \quad x > e^\pi. \tag{29}$$

Принимая во внимание формулы (24), (26), имеем

$$\operatorname{Im} T_0^*(x) = -\pi(\alpha^* + 1)(\ln|x|)^{\alpha^*} + R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*), \quad x < -e^\pi,$$

следовательно, с учетом (28) приходим к соотношению

$$\operatorname{Im} T^*(x) = V^*(x) - \pi(\alpha^* + 1)(\ln|x|)^{\alpha^*} + R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*), \quad x < -e^\pi. \tag{30}$$

Таким образом, мы получили соотношения (29), (30), аналогичные приведенным в вышеуказанной лемме.

Как и выше, имея функцию $T^*(z)$ формулы (27), определим аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ функцию

$$\overline{T}^*(z) = \overline{T^*(\overline{z})}, \tag{31}$$

для значений которой в точках действительной оси $z = \overline{z} = x$ имеем

$$\operatorname{Re} \overline{T}^*(x) = \operatorname{Re} T^*(x), \quad \operatorname{Im} \overline{T}^*(x) = -\operatorname{Im} T^*(x). \tag{32}$$

.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевое условие (2) запишем так:

$$\operatorname{Re}[e^{-i\widetilde{\nu}(t)} \frac{\Phi(t)}{e^{\beta T(t)+\beta^*\overline{T}^*(t)}}] = 0, \quad t \in L, \tag{33}$$

где β, β^* — действительные постоянные,

$$\widetilde{\nu}(t) = \arg G(t) - \beta \operatorname{Im} T(t) - \beta^* \operatorname{Im} \overline{T}^*(t). \tag{34}$$

Согласно (3) с учетом (21), (22), (29)–(32) получим

$$\widetilde{\nu}(t) = \nu(t) + \nu^-(\ln t)^\alpha - \beta[V(t) - \pi(\alpha+1)(\ln t)^\alpha + R_{\alpha-2k}(t,\alpha)] + \beta^* V^*(t), \quad t > e^\pi,$$
$$\widetilde{\nu}(t) = \nu(t) + \nu^+(\ln t)^{\alpha^*} - \beta V(t) + \beta^*[V^*(t) - \pi(\alpha^*+1)(\ln|t|)^{\alpha^*} + $$
$$+ R_{\alpha^*-2k^*}(|t|, \alpha^*)], \quad t < -e^\pi.$$

В дальнейшем будем считать, что числа β, β^* выбраны равными

$$\beta = -\frac{\nu^-}{\pi(\alpha+1)}, \quad \beta^* = \frac{\nu^+}{\pi(\alpha^*+1)}. \tag{35}$$

Тогда

$$\widetilde{\nu}(t) = \nu(t) - \beta[V(t) + R_{\alpha-2k}(t,\alpha)] + \beta^* V^*(t), \quad t > e^\pi, \tag{36}$$
$$\widetilde{\nu}(t) = \nu(t) - \beta V(t) + \beta^*[V^*(t) + R_{\alpha^*-2k^*}(|t|, \alpha^*)], \quad t < -e^\pi, \tag{37}$$

кроме того, в силу (32), (34) имеем

$$\widetilde{\nu}(t) = \arg G(t) - \beta \operatorname{Im} T(t) + \beta^* \operatorname{Im} \overline{T}^*(t), \quad -e^{\pi} \leqslant t \leqslant e^{\pi},$$

причем $\widetilde{\nu}(t)$ — непрерывная на L функция, удовлетворяющая условию H на любой конечной части L, $\widetilde{\nu}(-\infty) = \widetilde{\nu}(+\infty)$.

Далее определим аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \widetilde{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

граничное значение которой выражается формулой

$$\Gamma^+(t) = i\widetilde{\nu}(t) + \Gamma_0(t), \tag{38}$$

где

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_L \widetilde{\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}. \tag{39}$$

Учитывая последнее, краевое условие (33) запишем так:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{e^{-\Gamma^+(t)} \Phi(t)}{e^{\beta T(t) + \beta^* \overline{T}^*(t)}} \right] = 0, \quad t \in L.$$

Отсюда ясно, что функция

$$F(z) = \frac{e^{-\Gamma(z)} \Phi(z)}{e^{\beta T(z) + \beta^* \overline{T}^*(z)}}, \quad z \in D, \tag{40}$$

допускает аналитическое продолжение на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$. При этом приходим к заключению, что $F(z)$ является целой функцией.

Функция $\Gamma^+(t)$ формулы (38) удовлетворяет условию H на любой конечной части L, так как этим свойством обладают $\widetilde{\nu}(t)$ и интеграл $\Gamma_0(t)$ формулы (39) с плотностью $\widetilde{\nu}(t)$ [3, с. 61].

Принимая во внимание представления (36), (37), представления (17) для $V(x)$, $V'(x)$ и аналогичные для $V^*(x)$, $V^{*\prime}(x)$, а также формулу (20) для $R_{\alpha-2k}(x, \alpha)$ и аналогичную для $R_{\alpha^*-2k^*}(|x|, \alpha^*)$, придем к заключению, что интеграл (39) стремится к нулю как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Следовательно, интеграл $\Gamma_0(t)$ является ограниченной непрерывной функцией на L.

Если $\Phi(z)$ — ограниченное решение задачи (33), то

$$|e^{-\Gamma(z)} \Phi(z)| < C = \text{const}, \quad z \in D. \tag{41}$$

Тогда, принимая во внимание формулы (15), (27), легко придти к заключению, что порядок целой функции $F(z)$, для которой справедлива формула (40), равен нулю [11, с. 245].

Из формулы (40) находим функцию

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)} e^{\beta T(z) + \beta^* \overline{T}^*(z)} F(z), \tag{42}$$

которая удовлетворяет краевому условию (2), равносильному (33), т. е. является решением краевой задачи (2) и содержит произвольную целую функцию $F(z)$ нулевого порядка. В силу (40), (41) имеем

$$|F(z)| < Ce^{-\beta \operatorname{Re} T(z) - \beta^* \operatorname{Re} \overline{T}^*(z)}, \quad z \in D,$$

и, в частности, согласно (32)

$$|F(t)| < Ce^{-\beta \operatorname{Re} T(t) - \beta^* \operatorname{Re} \overline{T}^*(t)}, \quad t \in L. \tag{43}$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Если краевая задача* (2) *имеет ограниченное решение* $\Phi(z)$*, то оно определяется формулой* (42)*, в которой* $F(z)$ *— целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (43).

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. *Если* $F(z)$ *— любая целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая условию* (43)*, то ограниченное решение краевой задачи* (2) *определяется формулой* (42).

В самом деле, функция (42) с указанной в теореме функцией $F(z)$ удовлетворяет краевому условию (2). Остается установить ограниченность этого решения. Учитывая, что $F(z)$– функция нулевого порядка и выражения для $T(z)$, $\overline{T}^*(z)$, придем к заключению, что порядок функции $\Phi(z)$ формулы (42) в полуплоскости D не может быть положительным [12, с. 69], так как [11, с. 244] для любого малого $\epsilon > 0$ $\max|F(z)| < \exp r^{\epsilon}$ при $r \to \infty$ и в силу (42) справедливо

$$\ln \max_{|z|=r} |\Phi(z)| < r^{\epsilon} + \max_{|z|=r} \operatorname{Re}\Gamma(z) + |\beta| \max_{|z|=r} \operatorname{Re} T(z) + |\beta^*| \max_{|z|=r} \operatorname{Re} T^*(z), \quad r \to \infty.$$

Но в силу условия (43) и формулы (42) будет выполняться неравенство $|\Phi(t)| < \tilde{C} = \mathrm{const}$, $t \in L$. Поэтому, согласно теореме Фрагмена – Линделефа [12, с. 69, 206, 211], всюду в области D будем иметь $|\Phi(z)| < \tilde{C}$, что и требовалось установить.

Показатель правой части формулы (43) с учетом (35) можно записать так:

$$-\beta \operatorname{Re} T(t) - \beta^* \operatorname{Re} T^*(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\nu^-}{\alpha+1} \operatorname{Re} T(t) - \frac{\nu^+}{\alpha^*+1} \operatorname{Re} T^*(t)\right]. \tag{44}$$

На основании формул (15), (27) имеем соответственно

$$\operatorname{Re} T(t) \sim (\ln|t|)^{\alpha+1}, \quad \operatorname{Re} T^*(t) \sim (\ln|t|)^{\alpha^*+1}, \quad |t| \to \infty. \tag{45}$$

Если выполняется условие

$$\Big(\beta \operatorname{Re} T(t) + \beta^* \operatorname{Re} T^*(t)\Big) \to +\infty, \quad t \to -\infty \text{ или } t \to +\infty, \tag{46}$$

то целая функция нулевого порядка $F(z)$, удовлетворяющая неравенству (43), обращается в нуль тождественно: $F(z) \equiv 0$ [11, с. 256]. В этом случае по формуле (42) мы получаем только нулевое решение краевой задачи (2).

Из формул (44), (45) видно, что при выполнении любого из следующих условий:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \alpha > \alpha^* \quad \text{и} \quad \nu^- < 0, \\ &\text{б)} \quad \alpha < \alpha^* \quad \text{и} \quad \nu^+ > 0, \\ &\text{в)} \quad \alpha = \alpha^* \quad \text{и} \quad \nu^- - \nu^+ < 0, \end{aligned} \tag{47}$$

будет иметь место соотношение (46) и краевая задача (2) будет иметь только нулевое решение.

Итак, справедлива

Теорема 3. *Если выполняется условие* (46)*, в частности, имеет место любое из трех условий* (47)*, то краевая задача* (2) *имеет только нулевое решение.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, дано новое прозрачное решение задачи Гильберта с краевым условием на действительной оси, когда индекс задачи обращается в бесконечность логарифмического порядка и $\arg G(t) \sim \nu^-(\ln|t|)^\alpha$ при $t \to +\infty$, $\arg G(t) \sim \nu^+(\ln|t|)^{\alpha^*}$ при $t \to -\infty$, с различными, вообще говоря, показателями α и α^*. Это решение в общем случае содержит произвольную целую функцию нулевого порядка, удовлетворяющую действительному условию (43), т. е. задача имеет бесконечное множество решений. В отдельных случаях рассматриваемая задача имеет только нулевое решение.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00060).

Библиографический список

1. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 6. С. 16–23.
2. *Алекна П. Ю.* Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Литов. матем. сб. 1977. Т. XVII, № 6. С. 5–12.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 289 с.
5. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки. 2003. Т. 73, вып. 5. С. 724–734. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm221
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
7. *Карабашева Э. Н.* О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности // Изв. КГАСУ. 2014. № 1 (27). С. 242–252.
8. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. вузов. Матем. 1966. № 2. С. 158–163.
9. *Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н.* Решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на луче новым методом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017 Т. 17, вып. 2. С. 160–171. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171
10. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967. Т. 1. 486 с.
11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967. Т. 2. 624 с.
12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

Образец для цитирования:
Салимов Р. Б., Хасанова Э. Н. Новый метод исследования краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 297–309. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309

New Method for Investigating the Hilbert Boundary Value Problem with an Infinite Logarithmic Order Index

R. B. Salimov, E. N. Khasanova

Rasih B. Salimov, https://orcid.org/0000-0003-4177-4830, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia, salimov.rsb@gmail.com

Enzhe N. Khasanova, https://orcid.org/0000-0002-0067-2224, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russia, enkarabasheva@bk.ru.

We consider the problem of identification of the analytical in the complex upper half plane by boundary condition on the entire real axis, according to which, the real part of the product, by the given on the real axis complex function and the boundary values of the desired analytical function equal zero everywhere on the real axis. It is assumed that the argument of the coefficient of the boundary condition turns to infinity as one or another degree of the logarithm of the module of the coordinate of the axis point with unlimited distance of this point from the origin in one or another direction. Derived the formula that defines an analytical function in the upper half-plane, the imaginary part of which, when the coordinate of the axis point of the positive half-axis tends to infinity, is infinitely large of the same order as the argument of the coefficient of the boundary condition. Then derived a similar analytical function, the imaginary part of which turns to infinity of the same order as the argument of the coefficient of the boundary condition, when the points of the negative real axis are removed to infinity. We eliminate the infinite gap of the argument of the coefficient of the boundary condition by using these two functions. So the problem reduced to a finite index problem by techniques similar to F. D. Gakhov method. The method of F. D. Gakhov is used to solve the last problem. The solution depends on an arbitrary integer function of zero order, whose module satisfy to an additional condition.

Keywords: Hilbert boundary value problem, analytical function, infinite index, logarithmic order.

Received: 16.04.2019 / Accepted: 15.03.2020 / Published: 31.08.2020

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-31-00060).

References

1. Sandrygailo I. E. On Hilbert's boundary-value problem with infinite index for the half-plane. *Izv. Akad. nauk Belorus. SSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1974, no. 6, pp. 16–23 (in Russian).
2. Alekna P. The Hilbert boundary-value problem with infinite index of logarithmic orden in the half-plane. *Lith. Math. J.*, 1978, vol. 17, pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00968485
3. Muskheshvili N. I. *Singuliarnye integral'nye uravneniia* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (in Russian).

4. Govorov N. V. *Kraevaia zadacha Rimana s beskonechnym indeksom* [Riemann Boundary Problem with Infinite Index]. Moscow, Nauka, 1986. 289 p. (in Russian).
5. Salimov R. B., Shabalin P. L. To the solution of the Hilbert problem with infinite index. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 680–689. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024064822157
6. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary-Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
7. Karabasheva E. N. On solvability of homogeneous Hilbert problem with countable set of points discontinuities and of a different order two-side curling at infinity. *News of the KSUAE*, 2014, no. 1 (27), pp. 242–252 (in Russian).
8. Yurov P. G. The homogeneous Riemann boundary value problem with an infinite index of logarithmic type. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1966, no. 2, pp. 158–163 (in Russian).
9. Salimov R. B., Khasanova E. N. The Solution of the Homogeneous Boundary Value Problem of Riemann with Infinite Index of Logarithmic Order on the Beam by a New Method. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 160–171 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-160-171
10. Markushevich A. I. *Teoriia analiticheskikh funktsii: v 2 t.* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1968. 486 p. (in Russian).
11. Markushevich A. I. *Teoriia analiticheskikh funktsii: v 2 t.* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1968. 624 p. (in Russian).
12. Levin B. Ya. *Raspredelenie kornei tselykh funktsii* [Distribution of Zeros of Entire Functions]. Moscow, Gostechizdat, 1956. 632 p. (in Russian).

Cite this article as:

Salimov R. B., Khasanova E. N. New Method for Investigating the Hilbert Boundary Value Problem with an Infinite Logarithmic Order Index. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 297–309 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-297-309