УДК 512.572

О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42, ratseevsm@mail.ru

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 432071, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5, chai@pisem.net

Пусть K — основное поле нулевой характеристики. Хорошо известно, что в этом случае вся информация о многообразии линейных алгебр $\mathbf{V}$ содержится в его полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V})$, $n \in \mathbb{N}$, где $P_n(\mathbf{V})$ — линейная оболочка полилинейных слов от n различных букв в свободной алгебре $K(X, \mathbf{V})$. Д. Фаркаш для случая алгебр Пуассона ввел понятие customary-полиномов и доказал, что любое нетривиальное многообразие алгебр Пуассона удовлетворяет некоторому customary-тождеству. Алгебры Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона. В работе исследуется последовательность customary-пространств свободной алгебры Лейбница – Пуассона $\{Q_{2n}\}_{n\geqslant 1}$. Приводится базис и размерность пространств Q_{2n}. Доказан аналог теоремы Д. Фаркаша для случая алгебр Лейбница – Пуассона: в случае основного поля нулевой характеристики любое нетривиальное тождество свободной алгебры Лейбница – Пуассона имеет в качестве своих следствий нетривиальные тождества в customary-пространствах.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Поступила в редакцию: 20.05.2019 / Принята: 09.09.2019 / Опубликована: 31.08.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296

Линейная алгебра $A(+, \{,\}, K)$ с K-биллинейной операцией умножения $\{,\}$ над полем K называется *алгеброй Лейбница*, если в ней выполнено тождество

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли.

Далее везде предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле K произвольно.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница – Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\begin{aligned} \{a \cdot b, c\} &= a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \\ \{c, a \cdot b\} &= a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a, b, c \in A$. Если в алгебре Лейбница – Пуассона выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры

Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д. Обзоры работ по PI-алгебрам Пуассона и Лейбница – Пуассона можно найти в работах [1, 2].

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a,b\},c\} = \{a,b,c\}$.

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Лейбница, $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница – Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение тождества, PI-алгебры, многообразия алгебр Лейбница – Пуассона вводятся стандартным образом. Все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [3–5].

Лемма 1 (см. [2]). *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \tag{2}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) *$r \geqslant 0$, причем $k_1 < \ldots < k_r$ при $r > 0$, а при $r = 0$ моном $x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r}$ отсутствует;*

(ii) *каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$ встречается в (2) ровно один раз;*

(iii) *каждый множитель $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}, \ldots, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}$ в (2) левонормирован и имеет длину $\geqslant 2$;*

(iv) *множители в (2) упорядочены по длине: $s \leqslant \ldots \leqslant t$;*

(v) *если два соседних множителя в (2), являющиеся скобками $\{,\}$, имеют одинаковую длину*

$$\ldots \cdot \{x_{p_1}, \ldots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \ldots, x_{q_s}\} \cdot \ldots,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \quad s \geqslant 2, \ldots, \quad t \geqslant 2.$$

Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства Γ_n будут являться все элементы вида (2) с условиями (ii)–(v) из леммы 1 при $r = 0$.

Выделим в пространстве Γ_{2n} подпространство Q_{2n}, порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

По аналогии со случаем алгебр Пуассона пространства Q_{2n} назовем customary-пространствами. Пусть S_n — симметрическая группа степени n.

Лемма 2. 1. *Следующие полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_{2n}$*

$$\{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\}, \tag{3}$$

$$\tau \in S_{2n}, \quad \tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2n-1), \tag{4}$$

образуют базис пространства Q_{2n};

2. $\dim\ Q_{2n} = \frac{(2n)!}{n!}$.

Доказательство. Понятно, что пространство Q_{2n} является линейной оболочкой элементов вида (3) с условием (4). Покажем, что данные элементы линейно независимы.

Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с умножением $[,]$. В векторном пространстве $A = A_L \oplus A_L$ над полем K определим операцию умножения $[,]$ следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]), \tag{5}$$

где $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$. Полученная алгебра A будет являться алгеброй Лейбница. Действительно, нетрудно проверить, что A является линейной алгеброй над полем K. Покажем, что в A выполнено тождество Лейбница. Учитывая, что A_L является алгеброй Ли, получаем:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)] = ([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_1, z_1]),$$
$$[(x_1, x_2), (z_1, z_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, z_1, y_1], [x_2, z_1, y_1]) = -([z_1, x_1, y_1], [z_1, x_2, y_1]),$$
$$[(x_1, x_2), [(y_1, y_2), (z_1, z_2)]] = ([x_1, [y_1, z_1]], [x_2, [y_1, z_1]]) = -([y_1, z_1, x_1], [y_1, z_1, x_2]).$$

Для доказательства тождества Лейбница для левых частей данных трех равенств остается применить тождество Якоби для правых частей.

Далее, пусть A — некоторая алгебра Лейбница с умножением $[,]$ над полем K. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ — линейный базис пространства A над K. Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1, v_2, \ldots]$. Скобки $\{,\}$ для элементов v_i определим как умножение в A: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки $\{,\}$ на все $K[v_1, v_2, \ldots]$, используя линейность и правила (1). Построенная таким образом алгебра будет являться алгеброй Лейбница – Пуассона, которую обозначим через $LP(A)$.

Пусть $H_{2n} = K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ — ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Превратим H_{2n} в алгебру Пуассона, введя в H_{2n} скобки Пуассона $\{,\}$ следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial Y_i} - \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \right), \qquad f, g \in H_{2n}.$$

Полученная алгебра называется *алгеброй Гамильтона* [6].

Пусть $\widetilde{H}_{2n} = H_{2n} \oplus H_{2n}$ — алгебра Лейбница с операцией умножения (5). Рассмотрим алгебру Лейбница – Пуассона $LP(\widetilde{H}_{2n})$.

Обозначим через T_{2n} — множество всех перестановок из S_{2n} с условием (4). Предположим, что для некоторого n элементы вида (3) линейно зависимы:

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K,$$

где не все α_τ равны нулю. Пусть $\alpha_\sigma \neq 0$, $\sigma \in T_{2n}$. В данной линейной комбинации сделаем такие подстановки элементов алгебры $LP(\widetilde{H}_{2n})$:

$$x_{\sigma(1)} \to (0, X_1), \quad x_{\sigma(2)} \to (Y_1, 0),$$
$$\ldots$$
$$x_{\sigma(2n-1)} \to (0, X_n), \quad x_{\sigma(2n)} \to (Y_n, 0).$$

Тогда рассматриваемая линейная комбинация превратится в равенство

$$\alpha_\sigma(0,1)^n = (0,0),$$

что является верным только при $\alpha_\sigma = 0$. Противоречие.

Условие 2 следует из условия 1. □

Моном $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, $n \geqslant 2$, свободной алгебры Лейбница $L(X)$ назовем лейбницевым мономом длины n. Будем говорить, что элемент вида $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \cdot \ldots \cdot \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_m}\}$ свободной алгебры Лейбница – Пуассона $F(X)$ является произведением лейбницевых мономов.

Лемма 3. *В полилинейном лейбницевом мономе $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ вместо переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, подставим $x_i \cdot x_{n+1}$. Тогда*

$$\{x_1, \ldots, x_i \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n\} = \\ = x_i \cdot \{x_1, \ldots, x_{n+1}, \ldots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\} + g(x_1, \ldots, x_{n+1}), \qquad (6)$$

где g — полилинейный элемент от переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$ свободной алгебры Лейбница – Пуассона, являющийся линейной комбинацией произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения $n-1$, в случае если $i < n$, и $g = 0$, если $i = n$.

Доказательство. Обозначим $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$. Применим математическую индукцию по параметру $n-i$. При $n-i=0$ тождество (6) выполнено. Пусть $n-i=1$. Тогда

$$\{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} = \{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} + \{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\}.$$

При этом для первого и второго слагаемых выполнены соответствующие тождества:

$$\{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} = x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\},$$
$$\{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\} = \{A, x_{n-1} \cdot \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{A, x_{n+1} \cdot \{x_{n-1}, x_n\}\} = \\ = x_{n-1} \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ + x_{n+1} \cdot \{A, \{x_{n-1}, x_n\}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\} = \\ = x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} - x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} - x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}.$$

В итоге

$$\{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} = x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} + \\ + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}.$$

Предположим, что утверждение верно для $n-i < k$, $k \geqslant 2$. Пусть $n-i=k$. Тогда

$$\{A, x_i \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n\} = \{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n\} + \{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \ldots, x_n\}.$$

Применяя предположение индукции, получаем:

$$\{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \ldots, x_n\} = x_i \cdot \{A, x_{i+1}, x_{n+1}, \ldots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n\} + g_1,$$
$$\{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \ldots, x_n\} = \\ = x_i \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_{i+1}\}, \ldots, x_n\} + \{x_{n+1}, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n\} +$$

$$+x_{n+1}\cdot\{A,\{x_i,x_{i+1}\},\ldots,x_n\}+\{x_i,x_{i+1}\}\cdot\{A,x_{n+1},x_{i+2},\ldots,x_n\}+g_2,$$

где g_1, g_2 — линейные комбинации произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения $n-1$. В итоге

$$\{A,x_i\cdot x_{n+1},\ldots,x_n\}=x_i\cdot\{A,x_{n+1},x_{i+1},\ldots,x_n\}+x_{n+1}\cdot\{A,x_i,x_{i+1},\ldots,x_n\}+$$
$$+\{x_{n+1},x_{i+1}\}\cdot\{A,x_i,x_{i+2},\ldots,x_n\}+\{x_i,x_{i+1}\}\cdot\{A,x_{n+1},x_{i+2},\ldots,x_n\}+g_1+g_2. \quad \square$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Фаркаша [7,8] для случая алгебр Лейбница – Пуассона и показывает важность исследования пространств Q_{2n}.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие алгебр Лейбница – Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в* $\mathbf{V}$ *выполняется нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{\tau\in T_{2m}}\alpha_\tau\{x_{\tau(1)},x_{\tau(2)}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{\tau(2m-1)},x_{\tau(2m)}\}=0. \tag{7}$$

Доказательство. Из леммы 3 работы [2] следует, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $Id(\mathbf{V})$ многообразия алгебр Лейбница – Пуассона $\mathbf{V}$ порождается совокупностью полилинейных тождеств из последовательности $\Gamma_n\cap Id(\mathbf{V})$, $n\geqslant 2$. Поэтому пусть $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ — нетривиальное тождество многообразия $\mathbf{V}$, где $f\in\Gamma_n\cap Id(\mathbf{V})$ для некоторого n.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ является нетривиальной линейной комбинацией элементов вида (2) при $r=0$. Предположим, что элемент f не имеет требуемый вид (7). Тогда в элементе f среди всех слагаемых с ненулевыми коэффициентами зафиксируем такое, которое имеет лейбницевый моном максимальной длины. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{\ldots\}\cdot\ldots\cdot\{\ldots\}\cdot\{x_{i_1},\ldots,x_{i_d}\},\quad 0\neq\alpha\in K,$$

где $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_d}\}$ — лейбницевый моном максимальной длины $d>2$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1=n$. В элементе f вместо переменной x_n подставим $x_n\cdot x_{n+1}$. Тогда из леммы 3 следует, что

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\cdot x_{n+1})=x_n\cdot f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1})+x_{n+1}\cdot f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)+g, \tag{8}$$

где $g=g(x_1,\ldots x_{n+1})\in\Gamma_{n+1}$, причем ни одно слагаемое с ненулевым коэффициентом элемента g не содержит лейбницевых мономов длины d, в которых на первом месте находится либо переменная x_n, либо переменная x_{n+1}. Так как левая часть равенства (8), а также первые два слагаемых правой части данного равенства принадлежат $Id(\mathbf{V})$, то $g\in\Gamma_{n+1}\cap Id(\mathbf{V})$.

Если элемент g имеет вид (7), то все доказано. Иначе применяем к тождеству $g=0$ многообразия $\mathbf{V}$ аналогичную процедуру и т. д. В результате получим тождество требуемого вида (7). $\square$

Заметим, что в работе [9] доказан аналог теоремы Фаркаша для унитарных обобщенных PI алгебр Пуассона и унитарных PI алгебр жордановых скобок, а в работе [10] доказана теорема Фаркаша для многообразий общих алгебр Пуассона.

Библиографический список

1. *Рацеев С. М.* Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 2. С. 217–242.

2. *Рацеев С. М., Череватенко О. И.* Числовые характеристики алгебр Лейбница – Пуассона // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 143–159.
3. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
4. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. *Drensky V.* Free algebras and PI-algebras : Graduate course in algebra. Singapore : Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. *Farkas D. R.* Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
8. *Farkas D. R.* Poisson polynomial identities II // Arch. Math. 1999. Vol. 72, iss. 4. P. 252–260. DOI: https://doi.org/10.1007/s000130050329
9. *Kaygorodov I.* Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65, iss. 6. P. 1142–1157. DOI: https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257
10. *Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I.* The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // SIGMA. 2014. Vol. 10, iss. 115. 15 p. DOI: https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115

Образец для цитирования:
Рацеев С. М., Череватенко О. И. О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 290–296. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296

On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko

Sergey M. Ratseev, http://orcid.org/0000-0003-4995-9418, Ulyanovsk State University, 42 Leo Tostoy St., Ulyanovsk 432017, Russia, ratseevsm@mail.ru

Olga I. Cherevatenko, http://orcid.org/0000-0003-3931-9425, Ilya Ulyanov State Pedagogical University, 4/5 Lenina Sq., Ulyanovsk 432071, Russia, chai@pisem.net

Let K be a base field of characteristic zero. It is well known that in this case all information about varieties of linear algebras $\mathbf{V}$ contains in its polylinear components $P_n(\mathbf{V})$, $n \in \mathbb{N}$, where $P_n(\mathbf{V})$ is a linear span of polylinear words of n different letters in a free algebra $K(X, \mathbf{V})$. D. Farkas defined customary polynomials and proved that every Poisson PI-algebra satisfies some customary identity. Poisson algebras are special case of Leibniz – Poisson algebras. In the paper the sequence of customary spaces of the free Leibniz – Poisson algebra $\{Q_{2n}\}_{n\geqslant 1}$ is investigated. The basis and dimension of spaces Q_{2n} are given. It is also proved that in case of a base field of characteristic zero any nontrivial identity of the free Leibniz – Poisson algebra has nontrivial identities in customary spaces.

Keywords: Poisson algebra, Leibnitz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Received: 20.05.2019 / Accepted: 09.09.2019 / Published: 31.08.2020

References

1. Ratseev S. M. Numerical characteristics of varieties of Poisson algebras. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 237, iss. 2, pp. 304–322.
2. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. Numerical characteristics of Leibniz – Poisson algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 143–159 (in Russian).
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Science Press, 1987. 310 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1985. 448 p.).
4. Giambruno A., Zaicev M. V. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. Drensky V. *Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra*. Singapore, Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4695. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04008-1
7. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
8. Farkas D. R. Poisson polynomial identities II. *Arch. Math.*, 1999, vol. 72, iss. 4, pp. 252–260. DOI: https://doi.org/10.1007/s000130050329
9. Kaygorodov I. Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, iss. 6, pp. 1142–1157. DOI: https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257
10. Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras. *SIGMA*, 2014, vol. 10, iss. 115, 15 p. DOI: https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115

Cite this article as:

Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 290–296 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296