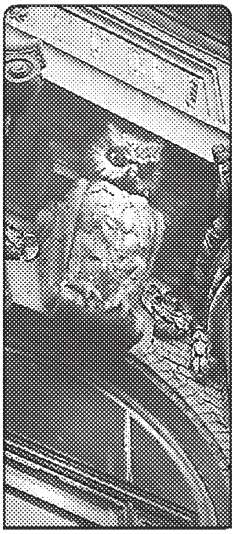

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 519.853

Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции

В. В. Абрамова, С. И. Дудов, М. А. Осипцев

Абрамова Вероника Валерьевна, аспирант кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Veronika0322@rambler.ru

Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, DudovSI@info.sgu.ru

Осипцев Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о вложении заданного компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ выпуклой функции $f(\cdot)$ с наименьшим значением α за счет смещения D. Ее математическая формализация приводит к задаче минимизации функции $\phi(x) = \max\limits_{y \in D} f(y - x)$ на $\mathbb{R}^p$. Исследованы свойства функции $\phi(x)$, получены необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи. В качестве базового для приложений выделен случай, когда $f(\cdot)$ — калибровочная функция Минковского некоторого выпуклого тела M. Показано, что если M — многогранник, то задача сводится к задаче линейного программирования. Предложен подход к получению приближенного решения, в котором при построении последовательности приближений $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$, зная приближение x_i, для получения x_{i+1} требуется решить более простую задачу вложения компакта D в лебегово множество калибровочной функции множества $M_i = G(\alpha_i)$, где $\alpha_i = \phi(x_i)$. Дается обоснование сходимости последовательности приближений к решению задачи.

Ключевые слова: калибровочная функция, внешняя оценка, субдифференциал, квазивыпуклая функция, сильно выпуклое множество, сильно выпуклая функция.

Поступила в редакцию: 12.03.2019 / Принята: 05.06.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оценка сложных множеств множествами простой структуры — одно из актуальных направлений негладкого анализа [1–4]. В рамках этого направления находится и рассматриваемая здесь задача.

Пусть D — ограниченное замкнутое множество из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, а $f(\cdot)$ — выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция. Требуется вложить множество D в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ этой функции с наименьшим значением α за счет смещения D, т. е. решить задачу

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{(\alpha,x)\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ D - x \subset G(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Задача такого вида возникает, например, при расчете параметров проектируемого технического устройства [5, 6]. При этом компакт D может отражать точностные возможности оборудования, используемого при изготовлении устройства, а функция $f(\cdot)$ — качественные характеристики проектируемого устройства.

Для корректности и нетривиальности задачи будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^p$, ее минимальное значение достигается, множество $G(\alpha_0)$, где $\alpha_0 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x)$, является ограниченным и при этом

$$G(\alpha_0) \overset{*}{-} D = \{z \in \mathbb{R}^p : z + D \subset G(\alpha_0)\} = \varnothing.$$

Нетрудно видеть, что задача (1) эквивалентна следующей минимаксной задаче

$$\phi(x) \equiv \max_{y\in D} f(y - x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{2}$$

При этом, если $\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$, то пара (ϕ^*, x^*), где $\phi^* = \phi(x^*)$, является решением задачи (1).

Нетрудно заключить, что при сделанных предположениях решение задачи существует. Отметим также, что на задачу (2) можно смотреть как на обобщение задачи о чебышевском центре множества D (случай, когда $f(\cdot)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$).

Цель работы — указать на основные свойства целевой функции задачи (2), получить критерий решения и условия единственности решения, а также предложить подход к получению приближенного решения задачи.

Далее используются следующие обозначения:
$\bar{A}$, $int\,A$, $co\,A$ — соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A;
$\|x\|$ — евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$;

$\underline{\partial} f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x;
$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x-y\| \leqslant r\}$ — шар с центром в точке x и радиусом r;
$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$;
$s(\cdot, A) = \sup\limits_{a\in A}\langle \cdot, a\rangle$ — опорная функция множества A, $0_p = (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^p$.

2. СВОЙСТВА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ. КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ

Основные свойства функции $\phi(x)$ отражает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ является выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией. Тогда функция $\phi(x)$ является:*

1) выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией, а ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ может быть выражен в виде

$$\underline{\partial}\phi(x) = -co\{\underline{\partial} f(z-x) : z \in Q^{\phi}(x)\}, \tag{3}$$

где $Q^{\phi}(x) = \{z \in D : f(z-x) = \phi(x)\}$;

2) строго выпуклой, если функция $f(\cdot)$ строго выпукла на $\mathbb{R}^p$;

3) сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой $C > 0$, т. е. для любых точек x_0, x_1 из $\mathbb{R}^p$ и $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)\phi(x_0) + \alpha\phi(x_1) - \frac{C}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2,$$

если функция $f(\cdot)$ сильно выпукла на $\mathbb{R}^p$ с константой C;

4) строго квазивыпуклой, т. е. для любых точек $x_0 \neq x_1$ из $\mathbb{R}^p$ и $\alpha \in (0,1)$ выполняется

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) < \max\{\phi(x_0), \phi(x_1)\},$$

если функция $f(\cdot)$ строго квазивыпукла на $\mathbb{R}^p$.

Доказательство. 1) Функция $\phi(x)$, как функция максимума от семейства выпуклых конечных функций $f(y-x)$ по параметру y на компакте D, также является выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$. Кроме того, функция $\Psi(x,y) = f(y-x)$ является непрерывной всюду по x и по y. Тогда, по известной в выпуклом анализе теореме о субдифференциале функции супремума от семейства выпуклых функций по параметру (см. [1, гл. 2, § 1], [7, гл. 4, § 4.2] или [8, гл. 1, § 1.17]), получаем

$$\underline{\partial}\phi(x) = -\overline{co}\{\underline{\partial} f(z-x) : z \in Q^{\phi}(x)\}.$$

Знак замыкания здесь можно снять. Действительно, непрерывность выпуклой конечной функции $f(\cdot)$ и замкнутость множества D дают замкнутость множества $Q^{\phi}(x)$. Кроме того, субдифференциал $\underline{\partial} f(\cdot)$, как многозначное отображение, обладает полунепрерывностью сверху. Отсюда следует замкнутость множества в фигурной скобке.

Свойства 2)–4) легко вытекают из дополнительных условий, накладываемых на функцию $f(\cdot)$. □

Теорема 2. *1. Для того чтобы точка x^* была точкой минимума функции $\phi(x)$ на $\mathbb{R}^p$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in co\{\underline{\partial} f(z-x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}. \tag{4}$$

2. Если существует $\delta > 0$ такое, что

$$B(0_p, \delta) \subset co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}, \tag{5}$$

то x^* является единственной точкой минимума функции $\phi(x)$ на $\mathbb{R}^p$, причем

$$\phi(x) \geqslant \phi(x^*) + \delta\|x - x^*\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p. \tag{6}$$

Доказательство. 1. Первое утверждение теоремы вытекает из формулы субдифференциала (3) и известного в выпуклом анализе критерия достижения выпуклой функции своего минимального значения (например, [1, гл. 4, § 2])

$$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x) \Leftrightarrow 0_p \in \underline{\partial}\phi(x^*).$$

2. Из (3)–(5), в соответствии с определением субдифференциала [1–3]

$$\underline{\partial}\phi(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : \phi(y) - \phi(x) \geqslant \langle v, y - x\rangle, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^p\},$$

следует

$$\phi(x) - \phi(x^*) \geqslant \langle v, x - x^*\rangle, \quad \forall\, v \in B(0_p, \delta), x \in \mathbb{R}^p.$$

Отсюда, положив $v = \dfrac{\delta}{\|x - x^*\|}(x - x^*)$, получаем (6). □

Замечание. Очевидно, единственность решения задачи (2), кроме соотношения (5), обеспечивает также строгая квазивыпуклость выпуклой функции $f(\cdot)$ и тем более ее строгая или сильная выпуклость. Это вытекает из теоремы 1.

3. БАЗОВЫЙ СЛУЧАЙ

Базовым для предлагаемого далее подхода к получению приближенного решения задачи (2) является случай, когда функция $f(\cdot)$ является калибром (калибровочной функцией Минковского) некоторого выпуклого телесного компакта M, причем $0_p \in int\ M$, т. е.

$$f(x) = k(x, M) \equiv \inf\{\alpha \geqslant 0 : x \in \alpha M\}. \tag{7}$$

Напомним основные свойства калибра (например, [1, 9]):

а) если $\lambda > 0$, то $k(\lambda x, M) = \lambda k(x, M)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$;

б) если $x \in M$, то $k(x, M) \leqslant 1$, а если $x \notin M$, то $k(x, M) > 1$;

в) $k(x + y, M) \leqslant k(x, M) + k(y, M)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^p$.

Свойства выпуклого тела M могут отражаться как на свойствах решения задачи, так и на сходимости предлагаемого метода получения приближенного решения.

Выделим для рассмотрения два частных случая.

3.1. Пусть выпуклое тело M является многогранником, заданным в виде

$$M = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y\rangle \leqslant 1,\ i = \overline{1, m}\},$$

где $A_i \in \mathbb{R}^p$, $i = \overline{1, m}$, $0_p \in int\, co\{A_i : i = \overline{1, m}\}$.

Из свойств калибра следует: если $\max\limits_{i=\overline{1,m}} \langle A_i, x\rangle = 1$, то точка x является граничной для M и $k(x, M) = 1$. А поскольку калибр является положительно однородной функцией, мы получаем для него формулу

$$k(x, M) = \max_{i=\overline{1,m}} \langle A_i, x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда задача (2) принимает вид

$$\max_{y\in D}\max_{i=\overline{1,m}}\langle A_i, y-x\rangle \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}$$

или

$$\max_{i=\overline{1,m}}\{a_i - \langle A_i, x\rangle\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{8}$$

где $a_i = \max\limits_{y\in D}\langle A_i, y\rangle$.

Задача (8) известным приемом [10] сводится к задаче линейного программирования. А именно справедлива

Теорема 3. *Задача* (8) *эквивалентна следующей задаче линейного программирования:*

$$\begin{cases} x^{(p+1)} \to \min\limits_{(x,x^{(p+1)})\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ \langle A_i, x\rangle + x^{(p+1)} - a_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{9}$$

Причем, если $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$ — *решение задачи* (9), *то* x_0 — *решение задачи* (8). *А если* x_0 — *решение задачи* (8), *то* $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$, *где* $x_0^{(p+1)} = \max\limits_{i=\overline{1,m}}\{a_i - \langle A_i, x_0\rangle\}$, *решение задачи* (9).

3.2. Теперь предположим, что M является сильно выпуклым множеством. Посмотрим, как это отразится на свойствах функции $f(\cdot)$ вида (7) и, соответственно, на функции $\phi(\cdot)$.

Сначала напомним некоторые понятия и факты из параметрически выпуклого анализа [8, 11].

Определение 1. Множество $A\subset\mathbb{R}^p$ называется *r-сильно выпуклым*, если оно представимо в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r.

Наряду с давно введенными понятиями сильно и слабо выпуклых (вогнутых) функций (см. [8, 11–13]) имеют место эквивалентные им альтернативные определения, которыми мы и будем пользоваться.

Определение 2. Пусть задано выпуклое множество $X\subset\mathbb{R}^p$ и функция $f: X\to\mathbb{R}$. Функция $f(\cdot)$ называется *сильно (слабо) выпуклой* с константой $C>0$ на множестве X, если функция $f(x) - \frac{C}{2}\|x\|^2$ ($f(x) + \frac{C}{2}\|x\|^2$) выпукла на X.

Функция $f(\cdot)$ называется *сильно (слабо) вогнутой* с константой $C>0$ на множестве X, если функция $-f(\cdot)$ сильно (слабо) выпукла на X с константой $C>0$.

Лемма 1. ([11, гл. 2, § 2.8]). *Если функция* $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ *слабо вогнута с константой* $C>0$, *то ее сопряженная функция*

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^p}\{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

сильно выпукла с константой $\frac{1}{C}$.

Лемма 2. ([11, гл. 3, § 3.7]). *Пусть* $M\subset\mathbb{R}^p$ *является r-сильно выпуклым множеством и задана дифференцируемая, слабо вогнутая с константой* $C>0$ *функция* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *такая, что* $|F'(t)|\leqslant L|t|$ *для любого* $t\in\mathbb{R}$. *Тогда функция* $f(x) = F(s(x, M))$ *слабо вогнута на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* $C_M^2 C + LC_M r$, *где* $C_M = \sup\limits_{x\in M}\|x\|$.

Теперь докажем важное свойство калибра.

Лемма 3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^p$ является r-сильно выпуклым множеством и $C_M = \sup\limits_{x \in M} \|x\|$. Тогда функция $\Psi(\cdot) = k^2(\cdot, M)$ является сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой, равной* $\dfrac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Доказательство. Для сопряженной к $\Psi(\cdot)$ функции получаем

$$\Psi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} \{\langle y, x\rangle - k^2(x, M)\} = \sup_{\lambda \geqslant 0} \sup_{x: k(x,M)=1} \{\langle y, \lambda x\rangle - \lambda^2 k^2(x, M)\} =$$

$$= \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda \sup_{x: k(x,M)=1} \langle y, x\rangle - \lambda^2\} = \sup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda s(y, M) - \lambda^2\} = \frac{s^2(y, M)}{4}.$$

Таким образом, сопряженная функция имеет вид

$$\Psi^*(y) = F(s(y, M)), \quad F(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Функция $F(\cdot)$ является дифференцируемой, $|F'(t)| \leqslant L|t|$ для $L = 1/2$ и, в соответствии с определением 2, слабо вогнута с константой $1/2$. Поэтому по лемме 2 функция $\Psi^*(y)$ слабо вогнута с константой $\frac{1}{2} C_M(C_M + r)$. Тогда по лемме 1 функция $\Psi^{**}(\cdot) = (k^2)^{**}(\cdot, M)$ будет сильно выпуклой с константой $2(C_M(C_M + r))^{-1}$. Остается заметить, что функция $k^2(\cdot, M)$ является выпуклой, как квадрат выпуклой функции с неотрицательными значениями, и непрерывной на $\mathbb{R}^p$. Поэтому по теореме Фенхеля – Моро [7–9, 11] выполняется $(k^2)^{**}(\cdot, M) = k^2(\cdot, M)$. $\square$

Очевидным следствием леммы 3 является

Теорема 4. *Если множество M является r-сильно выпуклым и $C_M = \sup\limits_{x \in M} \|x\|$, то функция $\phi^2(x) = \max\limits_{y \in D} k^2(y - x, M)$ является сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой* $\frac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Замечание. Сама функция $\phi(\cdot)$, как и $f(\cdot)$ вида (7), не является сильно выпуклой независимо от свойств множества M. Минимизация функции $\phi(\cdot)$ при $f(\cdot)$, имеющей вид (7), эквивалентна минимизации функции $\phi^2(x)$. А применение к минимизации сильно выпуклой функции численных методов (например, субградиентного типа, см. [2, 14]) позволяет рассчитывать на сходимость последовательности приближений к решению со скоростью геометрической прогрессии.

4. ПОДХОД К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ

Поскольку $\phi(\cdot)$ является выпуклой функцией, известна формула ее субдифференциала, то для получения приближенного решения задачи минимизации этой функции можно применять хорошо известные численные методы выпуклого программирования (см., например, [2, 14]). Мы обозначим здесь еще один возможный подход к получению приближенного решения задачи (2) с произвольной выпуклой функцией $f(x)$ и компактом D, удовлетворяющих заявленным в п. 1 условиям.

Принципиальная схема метода

Пусть $f(y_0) = \min\limits_{y\in\mathbb{R}^p} f(y)$. По исходному предположению $G(\alpha_0) \overset{*}{-} D = \varnothing$, где $\alpha_0 = f(y_0)$. Поэтому в силу непрерывности выпуклой конечной функции $f(\cdot)$ выполняется $y_0 \in intG(\alpha)$ для любого $\alpha > \alpha_0$ (или $0_p \in int(G(\alpha) - y_0)$). Последовательность приближений $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$ строится следующим образом. Точка начального приближения x_0 выбирается произвольно. Предположим, уже получена точка x_i. Возьмем в качестве $M_i = G(\alpha_i) - y_0$, где $\alpha_i = \phi(x_i)$. После этого решаем задачу

$$\phi_i(x) \equiv \max_{y\in D-y_0} k(y-x, M_i) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p} \tag{10}$$

и в качестве x_{i+1} берем одно из ее решений, т. е. $\phi_i(x_{i+1}) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi_i(x)$. Если при этом окажется, что $\phi(x_i) = \phi(x_{i+1})$, то, как будет доказано, это будет означать, что $\phi(x_i) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$ и итерационный процесс на этом заканчивается. В противном случае, т. е. при $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, процесс построения последовательности продолжается.

Обоснование сходимости

Без потери общности будем далее считать $y_0 = 0_p$. Из предполагаемой ограниченности множества $G(\alpha_0)$ и выпуклости функции $f(\cdot)$ следует ограниченность множества $G(\alpha)$ при любом $\alpha > \alpha_0$ [2, гл. 1, § 9]. Напомним также, что выпуклая конечная функция удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве [2, 8, 9].

Докажем следующий вспомогательный факт.

Лемма 4. *Пусть $\alpha > \phi^* = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$, L — константа Липшица для функции $f(\cdot)$ на множестве $G(\alpha)$ и $C \geqslant \sup\limits_{x\in G(\alpha)} \|x\|$. Если точка $x^*(\alpha)$ такова, что*

$$\max_{y\in D} k(y - x^*(\alpha), G(\alpha)) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \max_{y\in D} k(y-x, G(\alpha)), \tag{11}$$

то

$$\phi(x^*(\alpha)) \leqslant \alpha - \frac{(\alpha-\alpha_0)(\alpha-\phi^*)}{LC+\alpha-\phi^*}. \tag{12}$$

Доказательство. Из липшицевости функции $f(\cdot)$ следует

$$G(\phi^*) + B(0_p, \Delta) \subset G(\alpha), \tag{13}$$

где $\Delta = \dfrac{\alpha - \phi^*}{L}$. С другой стороны, поскольку $G(\alpha^*) \subset G(\alpha)$ и $\dfrac{1}{C}G(\alpha) \subset B(0_p, 1)$, то

$$\frac{C+\Delta}{C} G(\phi^*) \subset G(\phi^*) + B(0_p, \Delta). \tag{14}$$

Если $x^* \in Arg\min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$, то $D - x^* \subset G(\phi^*)$. Поэтому, учитывая (13)–(14), имеем

$$D - x^* \subset \frac{C}{C+\Delta} G(\alpha). \tag{15}$$

Из (11), (15) и определения калибра вытекает

$$\max_{y\in D} k(y-x^*(\alpha), G(\alpha)) \leqslant \max_{y\in D} k(y-x^*, G(\alpha)) \leqslant \frac{C}{C+\Delta}. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x,\alpha) = \alpha_0 + (\alpha-\alpha_0)k(x, G(\alpha)). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что в силу выпуклости функции $f(\cdot)$ и свойств калибра

$$f(x) \leqslant \Psi(x,\alpha), \quad \forall x \in G(\alpha). \tag{18}$$

Очевидно $D - x^*(\alpha) \subset G(\alpha)$. Тогда, используя (16)–(18), получаем

$$\phi(x^*(\alpha)) = \max_{y\in D} f(y-x^*(\alpha)) \leqslant \max_{y\in D} \Psi(y-x^*(\alpha),\alpha) =$$
$$= \alpha_0 + (\alpha-\alpha_0)\max_{y\in D} k(y-x^*(\alpha), G(\alpha)) \leqslant \alpha_0 + (\alpha-\alpha_0)\frac{C}{C+\Delta}.$$

После очевидного преобразования этого неравенства и подстановки $\Delta = \dfrac{\alpha-\phi^*}{L}$ получаем (12). □

Обозначим через $\rho(x, S^*) = \inf\limits_{y\in S^*}\|x-y\|$ — расстояние от точки x до $S^* = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi(y) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p}\phi(x)$ — множества решений задачи (2).

Теорема 5. *Если последовательность $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots}$ строится в соответствии с указанной схемой, то возможны два варианта:*

1) на некотором конечном шаге i_0+1 будет выполняться равенство $\phi(x_{i_0}) = \phi(x_{i_0+1})$, что будет означать $\phi(x_{i_0}) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p}\phi(x)$;

2) последовательность $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1\ldots}$ является строго убывающей и бесконечной, причем

$$\phi(x_{i+1}) \leqslant \phi(x_i) - \frac{(\phi(x_i)-\alpha_0)(\phi(x_i)-\phi^*)}{LC+\phi(x_i)-\phi^*}, \tag{19}$$

где L — константа Липшица для функции $f(\cdot)$ на множестве $G(\alpha_0)$, а $C \geqslant \sup\limits_{x\in G(\alpha_0)}\|x\|$. Кроме того, имеет место

$$\lim_{i\to\infty}\rho(x_i, S^*) = 0. \tag{20}$$

Доказательство. В соответствии со схемой метода точка x_{i+1} является одним из решений задачи (10). Если $\alpha_i = \phi(x_i) > \phi^*$, то по лемме 4, при $\alpha = \alpha_i$ и $x^*(\alpha_i) = x_{i+1}$, получаем $\phi(x_{i+1}) < \phi(x_i)$. Следовательно, если на конечном шаге i_0+1 выполняется равенство $\phi(x_{i_0}) = \phi(x_{i_0+1})$, то это будет означать $\phi(x_{i_0}) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p}\phi(x) = \phi^*$.

В противном случае, т. е. если такое равенство не достигается на конечном шаге, последовательность $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1,\ldots}$, подчиняясь, по лемме 4, неравенству (19), будет строго убывающей и бесконечной.

Предположим, (20) неверно. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{i_j}\}_{j=0,1\ldots}$ такая, что для некоторого $a > 0$ выполняется

$$\rho(x_{i_j}, S^*) \geqslant a, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{21}$$

Последовательность $\{x_i\}_{i=0,1,...}$ является ограниченной, поскольку

$$D - x_i \subset G(\phi(x_i)) \subset G(\phi(x_0)),$$

а любое множество $G(\alpha)$, как уже отмечалось, в силу исходных требований функции к $f(\cdot)$ и множеству D является ограниченным. Поэтому без потери общности можно считать подпоследовательность $\{x_{i_j}\}_{j=0,1...}$ сходящейся: $x_{i_j} \to x^*$, $j \to \infty$. Известно, что функция расстояния является непрерывной. Поэтому, переходя к пределу по по $j \to \infty$ в неравенстве (21), получаем $\rho(x^*, S^*) \geqslant a$ и, следовательно, $x^* \notin S^*$ и $\phi(x^*) > \phi^*$.

С другой стороны, и функция $\phi(x)$, как выпуклая и конечная на $\mathbb{R}^p$, является непрерывной. Поэтому из монотонности последовательности $\{\phi(x_i)\}_{i=0,1,...}$ следует $\lim\limits_{i\to\infty} \phi(x_i) = \lim\limits_{j\to\infty} \phi(x_{i_j}) = \phi(x^*)$. Тогда, переходя в (19) к пределу по $i \to \infty$, получаем неравенство

$$\phi(x^*) \leqslant \phi(x^*) - \frac{(\phi(x^*) - \alpha_0)(\phi(x^*) - \phi^*)}{LC + \phi(x^*) - \phi^*},$$

которое является противоречивым ввиду полученного выше неравенства $\phi(x^*) > \phi^*$. Теорема доказана полностью. □

Авторы еще раз подчеркивают, что лишь обозначили альтернативный применению известных методов выпуклого программирования подход к получению приближенного решения рассматриваемой задачи. Практическая реализация предполагает умение решать на каждом шаге некоторые нетривиальные (но более простые по отношению к исходной) вспомогательные задачи. В связи с этим приведем ряд комментариев, которые будут полезны при реализации данного подхода. При этом сразу отметим, что компакт D будем считать выпуклым, поскольку в случае невыпуклости его замена в задаче (2) на $co\, D$ дает новую задачу, эквивалентную прежней.

1. Изначально можно аппроксимировать выпуклый компакт D выпуклым многогранником D_ε с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Тогда подсчет приближенного к $\phi(x)$ значения $\phi^\varepsilon(x) = \max\limits_{y\in D_\varepsilon} f(y-x)$ будет сведен к вычислению значений $f(y-x)$ для y из конечного множества вершин многогранника D_ε и выбору максимального из них.

2. Множество $M_i = G(\alpha_i) - y_0$ на каждом шаге также можно аппроксимировать многогранником. Отметим наличие обширного спектра методов полиэдральной аппроксимации (см., например, обзор [15]). В частности, в нашем случае из точки y_0, которая является внутренней для $G(\alpha)$ при $\alpha > \alpha_0$, можно провести лучи до пересечения с границей M_i и в этих граничных точках построить опорные к M_i гиперплоскости, которые и образуют многогранник M_i^δ, аппроксимирующий многогранник M_i. Направление этих лучей можно задать сеткой точек «мелкости» $\delta > 0$ на единичной сфере (см. [8, § 4.9]).

3. В качестве приближенного значения $k(x, M_i)$ можно брать $k(x, M_i^\delta)$. Если многогранник M_i^δ выражен в форме $M_i^\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, x\rangle \leqslant 1, j = \overline{1,m}\}$, то, как отмечалось в п. 3.1, справедлива формула

$$k(x, M_i^\delta) = \max_{j=\overline{1,m}} \langle A_j, x\rangle.$$

Следовательно, в качестве приближенного значения для $\phi_i(x)$ можно брать

$$\phi_i^{\varepsilon,\delta}(x) = \max_{y\in D_\varepsilon} k(y-x, M_i^\delta) = \max_{j=\overline{1,m}} \{a_j - \langle A_j, x\rangle\},$$

где $a_j = \max\limits_{y\in D_\varepsilon} \langle A_j, y\rangle$.

4. Решение задачи (10) можно заменить решением «приближенной» задачи

$$\phi_i^{\varepsilon,\delta}(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p},$$

которая, как отмечалось в п. 3.1, может быть сведена к задаче линейного программирования.

5. Конечно, такой подход потребует исследования устойчивости и чувствительности решения задачи к погрешности полиэдрального приближения выпуклого компакта D и множеств M_i.

Благодарности. Авторы выражают признательность рецензенту за указанные погрешности и конструктивную критику.

Библиографический список

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.
2. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
3. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 431 с.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.
5. *Брейтон Р. К., Хэчтел Г. Д., Санджованни-Винчентелли А. Л.* Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // ТИИЭР. 1981. Т. 69, № 10. С. 180–215.
6. *Дудов С. И., Мещанов В. П.* Параметрическая оптимизация проектируемых устройств по критериям стоимости и качества // Обзоры по электронике. Сер. 1. Электроника СВЧ. М. : ЦНИИ «Электроника», 1990. Вып. 1 (1512). 40 с.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 481 с.
8. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004. 240 с.
9. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 340 с.
10. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964. 460 с.
11. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.
12. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1983. 384 с.
13. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of set and funtions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.
14. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011. 433 с.
15. *Бронштейн Е. М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // СМФН. 2007. Т. 22. С. 5–37.

Образец для цитирования:
Абрамова В. В., Дудов С. И., Осипцев М. А. Внешняя оценка компакта лебеговым множеством выпуклой функции // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 142–153. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153

The External Estimate of the Compact Set by Lebesgue Set of the Convex Function

V. V. Abramova, S. I. Dudov, M. A. Osiptsev

Veronika V. Abramova, https://orcid.org/0000-0002-7926-1347, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, Veronika0322@rambler.ru

Sergei I. Dudov, https://orcid.org/0000-0002-7926-1347, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, DudovSI@info.sgu.ru

Mikhail A. Osiptsev, https://orcid.org/0000-0002-7926-1347, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, Osipcevm@gmail.com

The finite-dimensional problem of embedding a given compact $D \subset \mathbb{R}^p$ into the lower Lebesgue set $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ of the convex function $f(\cdot)$ with the smallest value of α due to the offset of D is considered. Its mathematical formalization leads to the problem of minimizing the function $\phi(x) = \max\limits_{y \in D} f(y - x)$ on $\mathbb{R}^p$. The properties of the function $\phi(x)$ are researched, necessary and sufficient conditions and conditions for the uniqueness of the problem solution are obtained. As an important case for applications, the case when $f(\cdot)$ is the Minkowski gauge function of some convex body M is singled out. It is shown that if M is a polyhedron, then the problem reduces to a linear programming problem. The approach to get an approximate solution is proposed in which, having known the approximation of x_i to obtain x_{i+1} it is necessary to solve the simpler problem of embedding the compact set D into the Lebesgue set of the gauge function of the set $M_i = G(a_i)$, where $a_i = f(x_i)$. The rationale for the convergence for a sequence of approximations to the problem solution is given.

Keywords: gauge function, external estimate, subdifferential, quasiconvex function, strongly convex set, strongly convex function.

Received: 12.03.2019 / Accepted: 05.06.2019 / Published: 01.06.2020

Acknowledgements: The authors are grateful to the referee for the indicated errors and constructive criticism.

References

1. Pschenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (in Russian).
2. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable Optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1986. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1981. 384 p.).
3. Demyanov V. F., Rubinov A. V. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Elements of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus]. Moscow, Nauka, 1990. 431 p. (in Russian).
4. Clarke F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. SIAM, 1990. 308 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 280 p.).
5. Brayton R. K., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. A survey of optimization techniques for integrated-circuit design. *Proceedings of the IEEE*, 1981, vol. 69, iss. 10, pp. 1334–1362.

6. Dudov S. I., Meshchanov V. P. Parametric optimization of the designed devices according to the criteria of cost and quality. *Obzory po elektronike. Ser. 1. Elektronika SVCh* [Reviews on Electronics. Ser. 1. Electronics Microwave]. Moscow, TsNII "Electronika", 1990, iss. 1 (1512). 40 p. (in Russian).
7. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. *Theory of extremal problems*. Amsterdam, Nord Holland PC, 1979. 460 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 481 p.).
8. Polovinkin E. S., Balashov M. V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 240 p. (in Russian).
9. Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1970. 472 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 340 p.).
10. Zukhovitski S. I., Avdeeva L. I. *Linejnoe i vypukloe programmirovanie* [Linear and Convex Programming]. Moscow, Fizmatlit, 1967. 460 p. (in Russian).
11. Ivanov G. E. *Slabo vypuklye funktsii i mnozhestva* [Weakly convex sets and functions]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 352 p. (in Russian).
12. Poliak B. T. *Introduction to optimization*. New York, Optimization Software, 1987. 460 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 384 p.).
13. Vial J.-P. Strong and weak convexity of set and funtions. *Math. Ops. Res.*, 1983, vol. 8, no. 2, pp. 231–259.
14. Vasiliev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, MTsNMO, 2011. 433 p. (in Russian).
15. Bronstein E. M. Approximation of convex sets by polytopes. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 153, iss. 6, pp. 727–762.

Cite this article as:

Abramova V. V., Dudov S. I., Osiptsev M. A. The External Estimate of the Compact Set by Lebesgue Set of the Convex Function. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 142–153 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-142-153