УДК 511

ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,
кафедра алгебры и теории чисел
E-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

В работе решается бинарная аддитивная задача с полупростыми числами, на которые наложены дополнительные ограничения вида $\{(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$.

On the Binary Additive Problem

N.A. Zinchenko

Let c be a number lying in the interval $(1, 2]$. The binary additive problem with semiprimes p_1p_2 such that $\{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$ solved in this paper.

В 1940 году И.М. Виноградов методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида $[(2m)^2, (2m+1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$ [1].

В 1945 году Ю.В. Линник в [2] решил подобную задачу с применением формулы Мангольдта для функции Чебышева и плотностных теорем.

В 1986 году С.А. Гриценко в [3] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих x и лежащих в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $c \in (1, 2]$.

Заметим, что главные члены в асимптотических формулах из [1] и [3] одинаковы и равны $\frac{1}{2}\pi(x)$, а остаточный член в [3] имеет степенное понижение.

В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач с простыми числами, лежащими в промежутках (1) [4, 5].

Позднее задачи подобного вида рассматривались в [6] А. Балогом и Дж. Фридлендером.

Отметим, что в работах [4–6] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

На наш взгляд, представляют интерес бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков вида (1). В настоящее время они не поддаются решению. Из исследований в этом направлении отметим работу Д. Толева [7], в которой получен специальный вариант теоремы Бомбьери–Виноградова. Однако применение этой теоремы, даже в соединении с расширенной гипотезой Римана, не дает возможности решить, например, проблему делителей Титчмарша с простыми числами из промежутков (1).

В статье [8] получена асимптотическая формула для числа решений уравнения $p_1p_2 - xy = 1$, где p_1 и p_2 — простые, а x и y — натуральные числа, при условии, что $p_1p_2 \leqslant x$ и числа p_1p_2 лежат в промежутках (1).

В настоящей работе решается родственная бинарная аддитивная задача о числе решений уравнения вида $xy + p_1p_2 = n$, где $p_1,\ p_2$ — простые числа, а p_1p_2 лежат в промежутках (1).

В работе будут использованы следующие обозначения: p_1, p_2 — простые числа; $\tau(n)$ — число различных натуральных делителей числа n; $\{x\}$ — дробная часть числа x; (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b; $[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b; $P = n^{\frac{1}{(\ln\ln n)^2}}$; запись $\sum\limits_{p_1p_2+xy=n}$ означает, что суммирование идет по натуральным числам x, y и простым числам p_1, p_2, удовлетворяющим уравнению $p_1p_2 + xy = n$, причем p_1 и p_2 удовлетворяют еще неравенствам $p_i > \exp(\sqrt{\ln n}),\ i = 1, 2$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *Пусть*

$$J(n) = \sum_{p_1p_2+xy=n} 1, \qquad J_1(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\}<\frac{1}{2}}} 1.$$

Тогда справедлива формула

$$J_1(n) = \frac{1}{2}J(n)\left(1 + O\left(\frac{\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}\right)\right), \quad \text{где} \quad J(n) \asymp n\ln\ln n.$$

Доказательство. Обозначим через $\psi(y)$ характеристическую функцию промежутка $[0, \frac{1}{2})$, продолженную периодически с периодом 1 на всю числовую ось.

Тогда $J_1(n) = \sum\limits_{p_1p_2+xy=n} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right)$. Преобразуем $J_1(n)$:

$$J_1(n) = 2\sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\\ x\leqslant\sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right) - \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\\ x\leqslant\sqrt{n},\ y\leqslant\sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right) = 2J_{11}(n) - J_{12}(n). \qquad (2)$$

Рассмотрим сначала $J_{11}(n)$. Имеем

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O(R_{11}(n)),$$

где $J'_{11}(n) = \sum\limits_{\substack{p_1p_2+xy=n,\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right)$, $\quad R_{11}(n) = \sum\limits_{\substack{p_1p_2+xy=n,\\ \sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n},\\ p_1\leqslant\sqrt{n}}} 1.$

Пользуясь теоремой Бруна–Титчмарша [9, с.20], имеем

$$R_{11}(n) \ll n \sum_{\sqrt{n}P^{-10}<x\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln\frac{2n}{p_1x}} \ll \frac{n}{\ln\ln n},$$

то есть

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right). \qquad (3)$$

Аналогично рассуждая, приходим к равенству

$$J_{12}(n) = J'_{12}(n) + O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right),$$

где

$$J'_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}\\ y\leqslant\sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Рассмотрим $J'_{11}(n)$ и $J'_{12}(n)$. Имеем

$$J'_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(r_{11}(n)),$$

где

$$J''_{11}(n) = \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\exp(\sqrt{\ln n})<p_1\leqslant P} \sum_{\substack{p_2\leqslant\frac{n}{p_1},\\ p_1p_2\equiv n \pmod x}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right), \qquad (4)$$

$$r_{11}(n) = \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{p_2\leq\frac{n}{p_1},\\ p_1p_2\equiv n \pmod x}} 1.$$

Оценим $r_{11}(n)$ сверху. Имеем

$$r_{11}(n) = r'_{11}(n) + r''_{11}(n),$$

где $r'_{11}(n) = \sum\limits_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \sum\limits_{x_1\leqslant\frac{\sqrt{n}P^{-10}}{p_1}} \pi\left(\frac{n}{p_1},\ x_1,\ \frac{n}{p_1}\right)$, $\qquad r''_{11}(n) = \sum\limits_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \sum\limits_{\substack{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\\ (x,p_1)=1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, x, \frac{n}{p_1}\right).$

Пользуясь теоремой Бомбьери–Виноградова, получаем

$$r'_{11}(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1} \sum_{x_1\leqslant\frac{\sqrt{n}}{p_1}P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)},\ r''_{11}(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{P<p_1\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{p_1} \sum_{x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Отсюда имеем $r_{11}(n) \ll n\ln\ln\ln n$.

Итак, из (3) и (4) следует, что $J_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(n \ln\ln\ln n)$.

Аналогично получаем равенство $J_{12}(n) = J''_{12}(n) + O(n \ln\ln\ln n)$, где

$$J''_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\ p_1\leqslant P\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\ y\leqslant\sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Займемся получением асимптотической формулы для $J''_{11}(n)$.

Воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова [10, с. 23–26] и выберем параметры r, $\triangle$, α, β двумя способами.

Сначала определим эти параметры так: $r = [\ln n]$, $\Delta = \frac{1}{\ln^2 n}$, $\alpha = \Delta$, $\beta = \frac{1}{2} - \Delta$. Обозначим через $\psi_1(x)$ функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках».

Затем, при тех же r и Δ положим $\alpha = -\Delta$, $\beta = \frac{1}{2} + \Delta$, а соответствующую функцию обозначим как $\psi_2(x)$.

Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что

$$\psi_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \psi_2(x),$$

и

$$I_1(n) \leqslant J''_{11}(n) \leqslant I_2(n), \tag{5}$$

где

$$I_i(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\ p_1\leqslant P\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} \psi_i\left(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}\right),\ i = 1, 2.$$

Заметим, что если будут получены асимптотические формулы для $I_1(n)$ и $I_2(n)$ с совпадающими главными членами, то из неравенства (5) следует, что формула с таким же главным членом будет верна и для $J''_{11}(n)$.

Выведем асимптотическую формулу для $I_1(n)$.

Раскладывая функцию $\psi_1(\frac{1}{2}(p_1p_2)^{\frac{1}{c}})$ в ряд Фурье, получим

$$I_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) K_{11}(n) + \tilde{R}_1(n) + O(\ln n),$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1p_2+xy=n,\ p_1\leqslant P\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}} 1, \qquad \tilde{R}_1(n) = \sum_{0<|m|\leqslant\ln^3 n} |g_m||S_m(n)|,$$

$$S_m(n) = \sum_{\substack{p_1p_2\leqslant n\\ p_1\leqslant P}} t'(n - p_1p_2)e^{\pi im(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}}, \qquad t'(k) = \sum_{\substack{xy=k\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-1}}} 1,$$

g_m — коэффициент Фурье с номером m для функции ψ_1.

Оценим сумму $S_m(n)$. Для этого разобьем промежуток суммирования по p_1 на $O(\ln P)$ промежутков вида $(P_1,\ P_2]$, где $\exp(\sqrt{\ln n}) < P_1 \leqslant P$, $P_1 < P_2 \leqslant 2P_1$; тогда

$$|S_m(n)| \ll \ln P |S_m(P_1, P_2)|,$$

где $S_m(P_1, P_2) = \sum\limits_{\substack{p_1p_2\leqslant n\\ P_1<p_1\leqslant P_2}} t'(n - p_1p_2)e^{\pi im(p_1p_2)^{\frac{1}{c}}}$.

Оценим $S_m(P_1, P_2)$. Имеем

$$|S_m(P_1, P_2)| \leqslant \sum_{k\leqslant\frac{n}{P_1}} \Bigg| \sum_{\substack{P_1<p_1\leqslant P_2\\ kp_1<n}} t'(n - kp_1)e^{\pi im(kp_1)^{\frac{1}{c}}} \Bigg|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и применим неравенство Коши. Применяя лемму из работы Линника [11, с. 30], получим:

$$|S_m(P_1, P_2)|^2 \leqslant \frac{n}{P_1} \sum_{k\leqslant\frac{n}{P_1}} |\sum_{\substack{P_1<p_1\leqslant P_2\\ kp_1<n}} t'(n - kp_1)e^{\pi im(kp_1)^{\frac{1}{c}}}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{P_1}\sum_{P_1<p_1\leqslant P_2}\sum_{\substack{P_1<p_2\leqslant P_2\\ p_1\neq p_2}} V(m;p_1,p_2)+\frac{n}{P_1}\sum_{P_1<p_1\leqslant P_2}\sum_{k\leqslant \frac{n}{P_1}}\tau^2(n-kp_1)=\bar{S}+O\left(n^2\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right)\right), \quad (6)$$

где $\bar{S}=\dfrac{n}{P_1}\displaystyle\sum_{P_1<p_1\leqslant P_2}\sum_{\substack{P_1<p_2\leqslant P_2\\ p_1\neq p_2}} V(m;p_1,p_2)$, $\quad V(m;\ p_1,\ p_2)=\displaystyle\sum_{k\leqslant \frac{n}{P_1}} t'(n-kp_1)t'(n-kp_2)e^{\pi i m(p_1^{\frac{1}{c}}-p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}$.

Пусть $P_1<p_2<p_1\leqslant P_2$. Оценим сумму $V(m;\ p_1,\ p_2)$. Имеем:

$$V(m;\ p_1,\ p_2)=\sum_{x_1\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}\ \sum_{x_2\leqslant\sqrt{n}P^{-10}}\ \sum_{\substack{k\leqslant\frac{n}{p_1}\\ kp_1\equiv n \pmod{x_1}\\ kp_2\equiv n \pmod{x_2}}} e^{\pi i m(p_1^{\frac{1}{c}}-p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}.$$

Рассмотрим систему сравнений $\begin{cases} kp_1\equiv n \pmod{x_1},\\ kp_2\equiv n \pmod{x_2}.\end{cases}$ относительно переменной k. Если она неразрешима, то $V(m;\ p_1,\ p_2)=0$; если же система сравнений разрешима, то она эквивалентна сравнению $k\equiv k_0 \pmod{x_3}$, где

$$x_3=\begin{cases}[x_1,x_2], & \text{если } (p_1,x_1)=1 \text{ и } (p_2,x_2)=1,\\ [\frac{x_1}{p_1},x_2], & \text{если } p_1\mid x_1 \text{ и } p_1\mid n, \text{ но } p_2\nmid x_2,\\ [x_1,\frac{x_2}{p_2}], & \text{если } p_2\mid x_2 \text{ и } p_2\mid n, \text{ но } p_1\nmid x_1,\\ [\frac{x_1}{p_1},\frac{x_2}{p_2}], & \text{если } p_1\mid x_1,\ p_1\mid n,\ p_2\mid x_2,\ p_2\mid n.\end{cases}$$

Рассмотрим сумму

$$v_m(p_1,p_2)=\sum_{\substack{k\leqslant\frac{n}{p_1},\\ k\equiv k_0 \pmod{x_3}}} e^{\pi i m(p_1^{\frac{1}{c}}-p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}.$$

Имеем $v_m(p_1,p_2)=\sum\limits_{t\leqslant(\frac{n}{p_1}-k_0)\frac{1}{x_3}} e^{\pi i m(p_1^{\frac{1}{c}}-p_2^{\frac{1}{c}})x_3^{\frac{1}{c}}(t+\xi_0)^{\frac{1}{c}}}$, где $\xi_0=\frac{k_0}{x_3}$, $0\leqslant\xi_0<1$. В работе [8] для суммы $v_m(p_1,p_2)$ получена оценка вида $v_m(p_1,p_2)\ll\frac{n}{p_1x_3}\exp\left(-\gamma\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^6}\right)$, где $\gamma>0$ — константа. Отсюда и из (6) получаем, что $|S_m(P_1,P_2)|\ll n\exp(-\sqrt{\ln n})$ и, следовательно, $|S_m(n)|\ll n\exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n})$. Используя эту оценку и (6), приходим к формуле

$$I_1(n)=\left(\frac{1}{2}+O(\Delta)\right)K_{11}(n)+O\left(n\exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\right)\right).$$

Аналогичная асимптотическая формула получается и для $I_2(n)$.

Далее, из (4) и (5) следует, что

$$J_{11}(n)=\left(\frac{1}{2}+O(\Delta)\right)K_{11}(n)+O(n\ln\ln\ln n)=\frac{1}{2}K_{11}(n)+O(n\ln\ln\ln n).$$

Аналогично получается формула $J_{12}(n)=\frac{1}{2}K_{12}(n)+O(n\ln\ln\ln n)$, где $K_{12}(n)=\sum\limits_{\substack{p_1p_2+xy=n,\ p_1\leqslant P\\ x\leqslant\sqrt{n}P^{-10},\ y\leqslant\sqrt{n}}} 1$.

Теперь утверждение теоремы следует из равенства $J(n)=2K_{11}(n)-K_{12}(n)+O(n\ln\ln\ln n)$, которое выводится аналогично формуле (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант РНП. 2.1.1.3263).

Библиографический список

1. *Виноградов И.М.* Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. 1940. № 7. С. 365–372.

2. *Линник Ю.В.* Об одной теореме теории простых чисел // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. С. 7–8.

3. *Гриценко С.А.* Об одной задаче И.М. Виноградова // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 5. С.625–640.

4. *Гриценко С.А.* Тернарная проблема Гольдбаха и про-

блема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. 1988. Т. 43, вып. 4 (262). С. 203–204.
5. *Гриценко С.А.* Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 6. С. 1198–1216.
6. *Balog A., Friedlander K.J.* A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski–Shapiro // Pacific. J. Math. 1992. V. 156. P. 45–62.
7. *Tolev D.I.* On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set // Acta Arithmetica. 1997. V. 81, № 1. P. 57–68.
8. *Зинченко Н.А.* Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. 2005. Т. VI, вып. 2(14). С. 145–162.
9. *Хооли К.* Применения методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.
10. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.
11. *Линник Ю.В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.

УДК 511.3

О РЯДАХ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ РИМАНОВСКОГО ТИПА

В.В. Кривобок

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: KrivobokVV@info.sgu.ru

В данной работе доказывается утверждение о том, что в классе рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости $\sigma > 1$, имеющих конечнозначные мультипликативные коэффициенты, только L-функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа.

About Dirichle's Rows whith Finite-Valued Multiplicative Coefficients, Satisfy the Riman's Type Functional Equation

V.V. Krivobok

In this paper the class of absolutely convergent on the half-plane $\sigma > 1$ Dirichlet series with multiplicative finite-valued coefficients is considered. We prove that only Dirichlet L-functions are solutions of a functional Riemann type equation.

Известная теорема Гамбургера [1] говорит о том, что ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящийся в полуплоскости $\sigma > 1$ и удовлетворяющий функциональному уравнению Римана

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s),$$

с точностью до константы является ζ-функцией Римана.

Известно также [2], что функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) f(1-s), \tag{2}$$

где k — натуральное, кроме L-функций Дирихле удовлетворяют и другие функции, определяемые рядами Дирихле (1), и даже рядами Дирихле (1) с периодическими коэффициентами.

В данной работе будет показано, что в классе рядов Дирихле вида (1) с конечнозначными мультипликативными коэффициентами только L-функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению вида (2).

1. О РЯДАХ ДИРИХЛЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПОРЯДКОМ РОСТА МОДУЛЯ В ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работе [3] было получено условие, при котором ряд Дирихле (1) определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости растет следующим образом:

$$|f(s)| < Ce^{|s|\ln|s| + A|s|}, \tag{3}$$

где A — некоторая положительная константа.