Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $\sigma = \tilde{\sigma}(=1)$. Рассмотрим в $L_2[0,1]$ неоднородное уравнение (22). Так как по условию $k < \tau \le k+1$, $\sigma = 1$ и $k+1-\sigma\tau < \sigma$, то это уравнение будет иметь вид (27) при $m = k$, $l = 0$, $\sigma = 1$ и $g = g_n$ или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g_n(x), & \text{п.в.} \quad x \in [0, k+1-\tau]; \\ f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g_n(x), & \text{п.в.} \quad x \in (k+1-\tau, 1], \end{cases} \tag{69}$$

а в операторном виде

$$f = P_{1,\tau}^1 f + g_n. \tag{70}$$

Условие (67) является достаточным условием того, что оператор $P_{1,\tau}^1$ является сжимающим (см. доказательство пункта в) теоремы 4). Следовательно, при этом условии уравнение (70), а, значит, и уравнение (69) имеет единственное решение, которое дается формулой (68). Тогда из теоремы 3 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 6 полностью доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00003) *и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ* (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. № 9. С. 190–229.
3. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.
4. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции: Информационный бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.
5. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. V. 11. Simferopol, 2001. P. 86–93.
6. *Рыхлов В.С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009. Т. 6. № 1. С. 237–249.
7. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 88–91.
8. *Rykhlov V.S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. V. 7. Simferopol, 1997. P. 70–73.

УДК 517.51

ПРОЕКЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕССЕЛЕВЫХ СИСТЕМ

П.А. Терехин

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Рассматриваются бесселевы системы в банаховом пространстве относительно модельного пространства последовательностей. Установлены обобщенные аналоги теорем Бари, Шура, Новикова и Czaja.

Ключевые слова: бесселева система, базис, проектор, дополняемое подпространство.

Projection Description of Bessel Sequences

P.A. Terekhin

We consider Bessel sequences in Banach space with respect to modeling sequences space. The generalized analogues of theorems of Bari, Schur, Novikov and Czaja are established.

Key words: Bessel sequences, basis, projection, complemented subspace.

Пусть H — гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$ — система ненулевых элементов гильбертова пространства H.

Говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *бесселева система*, если существует положительная постоянная $B > 0$, такая что для любого вектора $h \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2 \le B\|h\|_H^2. \qquad (1)$$

Следующий классический результат принадлежит Н.К. Бари [1].

Теорема 1. *Для того чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H была бесселевой, необходимо и достаточно существования ограниченного линейного оператора $S : H \to H$, такого что*

$$Se_n = \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система элементов гильбертова пространства H.

При этом справедлива оценка $\|S\|_{H\to H} \le \sqrt{B}$.

Из сформулированной теоремы 1 непосредственно вытекает, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесселевой в том и только том случае, когда существует положительная постоянная $B > 0$, такая что для любой числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ выполняется неравенство

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \Big\|_H^2 \le B \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2. \qquad (2)$$

Таким образом, неравенства (1) и (2) эквивалентны.

Пусть $H = L^2(E)$ — гильбертово пространство, состоящее из суммируемых с квадратом измеримых функций $f(x)$, заданных на измеримом множестве E, снабженное нормой

$$\|f\|_{L^2(E)} = \left(\int_E |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

В этом случае условие бесселевости системы функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ может быть записано в следующем виде

$$\int_E \Big| \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(x) \Big|^2 dx \le B \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2. \qquad (3)$$

Система измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на измеримом множестве E, называется *продолжимой,* если существуют положительная постоянная $B > 0$ и измеримое множество $\widetilde{E} \supset E$ такие, что каждая функция $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, допускает такое продолжение на все множество $\widetilde{E}$, при котором система функций $\{f_n(x)/\sqrt{B}\}_{n=1}^{\infty}$ оказывается ортонормированной системой на множестве $\widetilde{E}$.

Имеет место следующая теорема Шура ([2], см. также [3]).

Теорема 2. *Система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(E)$ является продолжимой тогда и только тогда, когда эта система бесселева* (3).

Напомним, что матрица $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ называется *ограниченной в смысле Гильберта*, если равенства

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

корректно определяют ограниченный линейный оператор в пространстве l^2.

Обозначим $G = \{(f_i, f_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ матрицу Грама системы функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(E)$, где

$$(f_i, f_j) = \int_E f_i(x) f_j(x) \, dx, \qquad i, j = 1, 2, \dots$$

Как отмечается в работе Н.К. Бари [1], система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ бесселева тогда и только тогда, когда ее матрица Грама G ограничена в смысле Гильберта. Поэтому теорема Шура равносильна следующему утверждению:

для продолжимости системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *необходимо и достаточно, чтобы ее матрица Грама* G *была ограничена в смысле Гильберта,*

— Е.М. Никишин [4], где дано другое доказательство теоремы Шура, дающее явную конструкцию продолжения.

Следует отметить, что продолжение системы функций до полной ортонормированной системы изучалось в работах В.Я. Козлова [5] и А.М. Олевского [6]. Подробное изложение вопроса об ортогонализации систем функций с помощью продолжения на более широкое множество имеется в книге Б.С. Кашина и А.А. Саакяна [7]. Сформулируем здесь для сравнения с теоремой Шура следующую теорему Олевского [6].

Теорема 3. *Для того чтобы система функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(E)$ *допускала продолжение до полной ортонормированной системы на множестве* $\widetilde{E} \supset E$, *необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

1) система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в пространстве* $L_2(E)$,

2) матрица Грама системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет соотношению* $G^2 = G$,

3) матрица $I - G$ *имеет бесконечный ранг.*

В недавней работе С.Я. Новикова [8] теоремы Шура и Олевского о продолжении рассмотрены с точки зрения общих бесселевых систем (1) в абстрактном гильбертовом пространстве. Именно, в работе [8] показано, что всякая бесселева система (1) является (с точностью до умножения на положительную постоянную) ортогональной проекцией ортонормированной системы из некоторого объемлющего гильбертова пространства. Отметим, что метод работы [8] дает новое простое доказательство теоремы Шура, основанное на общем результате из функционального анализа об извлечении квадратного корня из положительного самосопряженного оператора.

В работе W. Czaja [9] установлен следующий результат.

Теорема 4. *Всякая полная бесселева система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов гильбертова пространства* H *является ортогональной проекцией* ω*-линейно независимой полной бесселевой системы* $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *элементов объемлющего гильбертова пространства* $\widetilde{H} \supset H$.

Напомним, что система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ω-линейно независимой*, если из соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

следует, что $x_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Основной задачей данной статьи является установление обобщенных аналогов упомянутых результатов Н.К. Бари, И. Шура, С.Я. Новикова и W. Czaja для бесселевых систем элементов банахова пространства. Заметим, что поставленная задача тесно связана с задачей проекционного описания фреймов, которая исследовалась в работах М.А. Наймарка [10], Б.С. Кашина, Т.Ю. Куликовой [11], P.G. Casazza, D. Han, D.R. Larson [12] и П.А. Терехина [13].

Модельным пространством назовем банахово пространство X числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис пространства X. Напомним, что i-й канонический орт имеет вид $\varepsilon_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Базис $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть *естественным базисом* модельного пространства X.

Каждый непрерывный линейный функционал l на модельном пространстве X однозначно определяется последовательностью $\{l(\varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ своих значений на элементах естественного базиса. Поэтому сопряженное пространство X^* изометрически изоморфно некоторому банахову пространству Y числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, так что

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

— общий вид непрерывного линейного функционала на X.

Пусть F — банахово пространство, $G = F^*$ — сопряженное пространство к F и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ — система ненулевых элементов банахова пространства F.

Определение 1. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *бесселевой системой в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X*, если существует положительная постоянная $B > 0$, такая что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность $\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенству

$$\|\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G. \tag{4}$$

Двойственное определение бесселевой системы в ситуации банахова пространства введено в работе O. Christensen, C. Heil [14].

Если $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = l^2$, то неравенство (4) принимает вид

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2\right)^{1/2} \le B\|h\|_H,$$

что совпадает с неравенством (1) из определения бесселевой системы с точностью до возведения в квадрат и замены постоянной. Поэтому классические бесселевы системы — это в точности бесселевы системы в гильбертовом пространстве H относительно модельного пространства l^2.

Следующая теорема является обобщенным аналогом теоремы 1.

Теорема 5. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является бесселевой системой в пространстве F относительно модельного пространства X тогда и только тогда, когда существует ограниченный линейный оператор $S : X \to F$, такой что*

$$S\varepsilon_n = \varphi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

При этом справедлива оценка $\|S\|_{X \to F} \le B$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесселева система в F относительно X. Обозначим X_0 линейное многообразие в модельном пространстве X, состоящее из всех финитных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $S\varepsilon_n = \varphi_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Распространим S по линейности до оператора, определенного на X_0 со значениями в F. Для любого $x \in X_0$ и любого $g \in G$ будем иметь

$$(Sx, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(g, \varphi_n) \le \|x\|_X \|\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|x\|_X\|g\|_G.$$

Отсюда следует, что $\|Sx\|_F \le B\|x\|_X$ для всех $x \in X_0$. Поскольку система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис модельного пространства X, то линейное многообразие X_0 плотно в X. Следовательно, существует непрерывное продолжение $S : X \to F$, которое будет искомым ограниченным линейным оператором. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $S\varepsilon_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для некоторого ограниченного линейного оператора $S : X \to F$. Рассмотрим сопряженный оператор $S^* : G \to Y$. По определению сопряженного оператора имеем

$$(x, S^*g) = (Sx, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(g, \varphi_n),$$

откуда $S^*g = \{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно,

$$\|\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y = \|S^*g\|_Y \le \|S^*\|\|g\|_G.$$

Последнее означает, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесселева в F относительно X. Достаточность доказана. □

Оператор $S : X \to F$, определенный соотношением (5), называют *оператором синтеза*, ассоциированным с бесселовой системой $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\varphi_n, \qquad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Из доказанной теоремы 5 непосредственно вытекает

Теорема 6. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является бесселевой системой в пространстве F относительно модельного пространства X тогда и только тогда, когда существует положительная постоянная $B > 0$ такая, что для любой числовой последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F \le B \|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_X. \tag{6}$$

Таким образом, неравенство (6), в котором участвуют нормы пространств F и X, равносильно неравенству (4) из определения 1 бесселевой системы в банаховом пространстве, в котором участвуют нормы сопряженных пространств G и Y. Видим, что переход к сопряженным пространствам в принятом нами определении 1 принципиален.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F называется *системой сходимости* в пространстве F относительно пространства последовательностей X, если для любой числовой последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится по норме пространства F.

Теорема 7. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является бесселевой системой в пространстве F относительно модельного пространства X в том и только том случае, когда она будет системой сходимости в пространстве F относительно пространства последовательностей X.*

Доказательство. Необходимость прямо следует из теоремы 6.

Достаточность. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система сходимости в F относительно X. Определим операторы $S_n : X \to F$ с помощью равенств

$$S_n x = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Эти операторы являются ограниченными. В самом деле, так как $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис модельного пространства X, то биортогонально сопряженные функционалы $l_n(x) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на X.

Далее, существует сильный операторный предел $S = s - \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, поскольку для каждого $x \in X$ сходится ряд

$$Sx = \lim_{n\to\infty} S_n x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Согласно принципу равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза оператор $S : X \to F$ ограниченный. Замечая, что $S\varepsilon_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и применяя теорему 6, получаем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесселева в пространстве F относительно X. Достаточность доказана. $\square$

Напомним, что базисы $\{e'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{e''_n\}_{n=1}^{\infty}$ банаховых пространств F' и F'' *(изометрически) эквивалентны,* если существует (изометрический) изоморфизм $J : F' \to F''$, такой что $e''_n = Je'_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства называется *базисной последовательностью,* если она является базисом в замыкании своей линейной оболочки.

Систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F, удовлетворяющую неравенству (4) с постоянной $B = 1$ будем называть *1-бесселевой системой* в пространстве F относительно модельного пространства X.

Теорема 8. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — 1-бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.*

Тогда существуют объемлющее банахово пространство $\widetilde{F} \supset F$, включающее в себя пространство F в качестве дополняемого замкнутого подпространства, базисная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\widetilde{F}$, изометрически эквивалентная естественному базису $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства X, и непрерывный линейный проектор $P : \widetilde{F} \to F$ из $\widetilde{F}$ на F такие, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Согласно теореме 6, существует ограниченный линейный оператор $S : X \to F$ такой, что $S\varepsilon_n = \varphi_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ При этом $\|S\|_{X\to F} \le B = 1$. Обозначим $\widetilde{F} = F \oplus X$ — прямую сумму банаховых пространств и пусть $P : \widetilde{F} \to F$ — естественная проекция прямой суммы на первое слагаемое. В качестве нормы в пространстве $\widetilde{F}$ рассмотрим величину

$$\|(f, x)\|_{\widetilde{F}} = \max\{\|f\|_F, \|x\|_X\}.$$

Зададим оператор $J : X \to \widetilde{F}$ равенством $Jx = (Sx, x)$. Нетрудно видеть, что $\|Jx\|_{\widetilde{F}} = \|x\|_X$ для всех $x \in X$. Последнее означает, что J - изометрический оператор. Поэтому его образ $Rang(J)$ является замкнутым подпространством в $\widetilde{F}$. Положим $\psi_n = J\varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Получим, что система $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является базисом в $Rang(J)$, изометрически эквивалентным естественному базису $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства X. Очевидно, что $S = PJ$, откуда $\varphi_n = P\psi_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ □

Определение 2. Систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ элементов банахова пространства F назовем *X-продолжимой*, если существуют постоянная $B > 0$, объемлющее банахово пространство $\widetilde{F} \supset F$, включающее в себя пространство F в качестве дополняемого замкнутого подпространства, базисная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $\widetilde{F}$, изометрически эквивалентная естественному базису $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства X, и непрерывный линейный проектор $P : \widetilde{F} \to F$ из объемлющего пространства $\widetilde{F}$ на исходное пространство F, такие что

$$\varphi_n = B \cdot P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Теорема 9. *Для того чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ элементов банахова пространства F была X-продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы она являлась бесселевой системой в пространстве F относительно модельного пространства X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является X-продолжимой. Положим $S = B \cdot PJ : X \to F$, где $J : X \to \widetilde{F}$ — изометрический оператор, осуществляющий изоморфизм пространства X и замкнутой линейной оболочки базисной последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, такой что $J\varepsilon_n = \psi_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ На основании проекционных соотношений (7) находим $S\varepsilon_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Используя теорему 6, заключаем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — бесселева система в F относительно X. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — бесселева система в F относительно X. Тогда $\{\varphi_n/B\}_{n=1}^\infty$ — 1-бесселева система. Применяя теорему 8, получаем существование объемлющего банахова пространства $\widetilde{F} \supset F$ и базисной последовательности $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $\widetilde{F}$, изометрически эквивалентной естественному базису $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства X, таких что $\varphi_n/B = P\psi_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $P : \widetilde{F} \to F$ — некоторый непрерывный линейный проектор из $\widetilde{F}$ на F. Видим, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является X-продолжимой. Достаточность доказана. □

Пусть $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = l^2$. Заменим в определении 2 непрерывный линейный проектор P на оператор ортогонального проектирования π из объемлющего гильбертова пространства $\widetilde{H}$ на исходное пространство H. Заметим, что базисная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, изометрически эквивалентная естественному базису $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ пространства l^2, суть ортонормированная система. Получим, что указанным образом видоизмененное понятие l^2-продолжимой системы в гильбертовом пространстве является непосредственным обобщением понятия продолжимой системы функций, с учетом попарной изомофности всех сепарабельных гильбертовых пространств. Таким образом, теорема 9 является обобщенным аналогом теоремы 2.

Из теорем 7 и 9 непосредственно вытекает

Теорема 10. *Всякая система сходимости $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X является X-продолжимой.*

Определение 3. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. *Пространством коэффициентов нуль-рядов* системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ назовем замкнутое подпространство

$$N = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X : \sum_{n=1}^\infty x_n\varphi_n = 0 \right\}$$

модельного пространства X.

Ясно, что пространство коэффициетов нуль-рядов N бесселевой системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с ядром $Ker(S)$ оператора синтеза $S : X \to F$.

Обозначим $\widetilde{F} = F \oplus N$ прямую сумму пространств F и N и $P : \widetilde{F} \to F$ естественную проекцию прямой суммы на первое слагаемое. Предположим, что пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в модельном пространстве X и пусть M — дополнительное подпространство, т.е. $X = M \oplus N$ и для любого $x \in X$ однозначно определены $x_M \in M$ и $x_N \in N$, такие что $x = x_M + x_N$. Определим оператор $J : X \to \widetilde{F}$ посредством равенства $Jx = (Sx_M, x_N)$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{F} \arrow[dd, "P"] \\ X \arrow[ur, "J"] \arrow[dr, "S"'] & \\ & F \end{tikzcd}$$

В самом деле, $S = PJ$, так как $PJx = P(Sx_M, x_N) = Sx_M = Sx$ в силу того что $Sx - Sx_M = Sx_N = 0$.

Положим $\psi_n = J\varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Поскольку $S = PJ$, то $\varphi_n = P\psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом, мы получили исходную бесселеву систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ как проекцию системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов объемлющего банахова пространства.

Будем говорить, что система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ получена с помощью указанной *конструкции продолжения*. Установим свойства системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 4. Скажем, что система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является ω-линейно независимой относительно пространства последовательностей* X, если из равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\psi_n = 0$, в котором числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X, следует, что $x_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Следующая теорема, основанная на операторной конструкции продолжения системы, является обобщением теоремы 4.

Теорема 11. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X и пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в пространстве X. Пусть система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства $\widetilde{F}$ получена с помощью конструкции продолжения. Тогда $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ω-линейно независимая бесселева система в пространстве $\widetilde{F}$ относительно пространства X. Кроме того, если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система в пространстве F, то $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система в пространстве $\widetilde{F}$.*

Доказательство. Оператор $J : X \to \widetilde{F}$ из конструкции продолжения ограничен. По построению $J\varepsilon_n = \psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно теореме 6 система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесселевой системой в $\widetilde{F}$ относительно X.

Ядро оператора J тривиально: $Ker(J) = \{0\}$. Действительно, предположим, что $Jx = 0$. Пусть $x = x_M + x_N$, где $x_M \in M$ и $x_N \in N$. По определению оператора J имеем $Jx = (Sx_M, x_N) = 0$. Следовательно, $x_N = 0$ и $x_M \in Ker(S) = N$, откуда $x_M = 0$. Получаем, что $x = 0$.

Теперь предположим, что $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\psi_n = 0$. Тогда

$$Jx = J\sum_{n=1}^{\infty} x_n\varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\psi_n = 0$$

— учли, что $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис модельного пространства X. Поскольку ядро оператора J тривиально, то $x = 0$. Таким образом, система $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ω-линейно независимой относительно пространства X.

Наконец, пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система в пространстве F. Тогда $\overline{Rang(S)} = F$ и поэтому $Ker(S^*) = \{0\}$ для сопряженного оператора $S^* : G \to Y$. Из соотношения $S = PJ$ следует, что

$S^* = J^*P^*$. Обозначим через $\widetilde{G}$ сопряженное пространство к пространству $\widetilde{F}$. Тогда $J^* : \widetilde{G} \to Y$ и $P^* : G \to \widetilde{G}$. Следующая коммутативная диаграмма получается из предыдущей обращением стрелок

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[dr, "J^*"] & \\ & Y \\ G \arrow[uu, "P^*"] \arrow[ur, "S^*"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь оператор P^* является вложением пространства G в пространство $\widetilde{G}$ как оператор, сопряженный к проектору. Поскольку $\widetilde{G} = (F \oplus N)^* = F^* \oplus N^* = G \oplus N^*$, то P^* — естественное вложение первого слагаемого G в прямую сумму $\widetilde{G} = G \oplus N^*$. Покажем, что $Ker(J^*) = \{0\}$. Предположим, что $J^*\widetilde{g} = 0$ для $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$. Пусть $g \in G$ — сужение непрерывного линейного функционала $\widetilde{g}$ на пространстве $\widetilde{F}$ на подпространство F. Пусть $x = x_M + x_N$, где $x_M \in M$ и $x_N \in N$. Согласно определению оператора J имеем $Jx_M = (Sx_M, 0) = Sx_M \in F$. Вычислим

$$(x, S^*g) = (Sx, g) = (Sx_M, g) = (Jx_M, g) = (Jx_M, \widetilde{g}) = (x_M, J^*\widetilde{g}) = 0.$$

Итак, $(x, S^*g) = 0$ для всех $x \in X$. Отсюда $S^*g = 0$. В силу равенства $Ker(S^*) = \{0\}$ получаем $g = 0$. Таким образом, если непрерывный линейный функционал $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ на пространстве F принадлежит ядру $Ker(J^*)$ оператора J^*, то его сужение на подпространство F является нулевым функционалом. Это означает, что $Ker(J^*) \subset N^*$. На основании определения оператора J находим $Jx_N = (0, x_N) = x_N \in N$. Поэтому для любого $z \in N^*$ будем иметь

$$(x_N, J^*z) = (Jx_N, z) = (x_N, z),$$

откуда $J^*z = z$, т. е. сужение оператора J^* на подпространство $N^* \subset \widetilde{G}$ является тождественным оператором I_{N^*}. Так как $Ker(J^*) \subset N^*$, то $Ker(J^*) = \{0\}$. Следовательно, $\overline{Rang(J)} = \widetilde{F}$, что и означает полноту системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\widetilde{F}$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Учен. записки МГУ. Математика. 1951. Т. 4, вып. 148. С. 69–107.
2. *Schur I.* Uber endliche Gruppen und Hermitische Formen // Math. Zeit. 1918. V. 1. P. 183–207.
3. *Rademacher H.* Einige Satze uber Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. 1922. V. 87, № 1–2. P. 112–138.
4. *Никишин Е.М.* О сходимости некоторых функциональных рядов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, вып. 1. С. 15–26.
5. *Козлов В.Я.* О локальной характеристике полной ортогональной нормированной системы функций // Мат. сборник. 1948. Т. 23, вып. 3. С. 441–474.
6. *Олевский А.М.* О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // Мат. заметки. 1969. Т. 6. С. 737–747.
7. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
8. *Новиков С.Я.* Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 893–903.
9. *Czaja W.* Remark on Naimark's duality // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. V. 136, № 3. P. 867–871.
10. *Наймарк М.А.* Спекральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, вып. 3. С. 277–318.
11. *Кашин Б.С., Куликова Т.Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 6. С. 941–945.
12. *Casazza P.G., Han D., Larson D.R.* Frames for Banach spaces // Contemp. Math. 1999. V. 247. P. 149–182.
13. *Терехин П.А.* Системы представления и проекции базисов // Мат. заметки. 2004. Т. 75, вып. 6. С. 944–947.
14. *Christensen O., Heil C.* Perturbations of Banach frames and atomic decompositions // Math. Nachr. 1997. V. 185. P. 33–47.