векторы x^0 и y^0, которые получаются из указанных балансовых векторов добавлением нулевых компонент для тех индексов, которые отсутствуют в N_1 и N_2 соответственно. Для того, чтобы (x^0, y^0) была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ вида (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дополнительные условия:

$$\widetilde{F}_{(i',\, y^0)} \leq^{\widetilde{\omega}_1} \widetilde{F}_{(x^0,\, y^0)} \quad \text{для всех} \quad i' \notin N_1, \tag{4}$$

$$\widetilde{F}_{(x^0,\, j')} \leq^{\widetilde{\omega}_2} \widetilde{F}_{(x^0,\, y^0)} \quad \text{для всех} \quad j' \notin N_2. \tag{5}$$

Таким образом, нахождение ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы функции реализации и проверке для ее балансовых векторов дополнительных условий (4), (5). Отметим, что условие сбалансированности матрицы сводится к положительной разрешимости некоторой системы линейных уравнений, а проверка дополнительных условий (4), (5) состоит, в силу теоремы 4, в выполнимости некоторой системы линейных неравенств.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Об упорядоченности множества вероятностных мер // Изв. вузов. Сер. Математика. 1988. № 11. С. 72–74.
2. *Розен В.В.* Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами // Кибернетика. 1989. № 6. С. 98–104.
3. *Розен В.В.* О мерах на упорядоченных множествах // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. Вып. 11. С. 35–39.
4. *Розен В.В.* Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434).
5. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений на основе частичной упорядоченности исходов // Таврический вест. информатики и математики. 2004. № 1. С. 54–59.
6. *Розен В.В.* Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5. С. 61–70.
7. *Розен В.В.* Упорядочение вероятностных мер // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 52–59.

УДК 519.83

КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: suri-cat@yandex.ru

Для игр с отношениями предпочтения мы рассматриваем в качестве принципов оптимальности равновесие по Нэшу, а также некоторые его модификации. Для описания оптимальных решений игр с отношениями предпочтения введены ковариантно и контравариантно полные семейства гомоморфизмов.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение предпочтения, гомоморфизм.

Covariant and Contrvariant Homomorphisms of Games with Preference Relations

T.F. Savina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: suri-cat@yandex.ru

We consider Nash equilibrium and some its modifications as principles of optimality for games with preference relations. For description of the optimal solutions of games with preference relations covariantly and contrvariantly complete families of homomorphisms are introduced.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, preference relation, homomorphism.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе объектом изучения являются игры с отношениями предпочтения, т.е. трехосновные алгебраические системы вида

$$G = \langle X,\, Y,\, A,\, \rho_1,\, \rho_2,\, F \rangle,$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, $F\colon X \times Y \to A$ — функция реализации, $\rho_i \subseteq A^2$ — бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока $i\,(i = 1, 2)$.

Будем обозначать через ρ^* строгую часть, а через ρ^s симметричную часть отношения предпочтения ρ.

Игры с отношениями предпочтения представляют собой некоторое обобщение классических игр с функциями выигрыша игроков, в которых цель отождествляется с максимизацией или минимизацией этих функций. Это обобщение связано с тем, что на практике при построении целевой функции возникают сложности как принципиального, так и технического характера. Мы используем альтернативный подход: при построении теоретико-игровой модели задаются не целевые функции, а отношения предпочтения для каждого игрока в виде бинарных отношений.

Основными принципами оптимальности в классе игр с отношениями предпочтения являются различные модификации принципа равновесия. А именно:

1. Ситуация (x_0, y_0) называется *ситуацией равновесия в смысле Нэша*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются соотношения:

$$F(x, y_0) \overset{\rho_1}{\lesssim} F(x_0, y_0), \qquad F(x_0, y) \overset{\rho_2}{\lesssim} F(x_0, y_0).$$

2. Заменяя в условии равновесия по Нэшу знак $\lesssim$ на $\not>$, получаем определение *ситуации общего равновесия*. Одностороннее отклонение от такой ситуации одного из игроков не приводит к более предпочтительному (с точки зрения отклонившегося игрока) исходу, т.е.

$$F(x_0, y_0) \overset{\rho_1^*}{\not<} F(x, y_0), \qquad F(x_0, y_0) \overset{\rho_2^*}{\not<} F(x_0, y).$$

Целью работы является установление взаимосвязей между ситуациями равновесия заданной игры и ситуациями равновесия ее гомоморфных образов.

Основные результаты работы докладывались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера [1].

1. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пусть теперь, кроме игры G, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U, V, B, \sigma_1, \sigma_2, \Phi\rangle$.

Для игр с отношениями предпочтения, как для алгебраических систем [2], естественным образом определяется понятие гомоморфизма.

Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1\colon X \to U$, $\varphi_2\colon Y \to V$, $\psi\colon A \to B$, называется *гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если для любой ситуации (x, y) и любых двух исходов a_1, a_2 игры G при $i = 1, 2$ выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \psi(a_2) \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

$$\psi(F(x, y)) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(y)). \tag{2}$$

Заметим, что в обозначениях теории бинарных отношений В.В. Вагнера [3] условие (1) принимает вид $\psi\Box\psi(\rho_i) \subseteq \sigma_i$, а условие (2) принимает вид $\psi \circ F = \Phi \circ (\varphi_1\Box\varphi_2)$.

Тройка отображений $(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\varphi_1\colon X \to U$, $\varphi_2\colon Y \to V$, $\psi\colon A \to B$, называется *строгим гомоморфизмом* игры G в игру Γ, если условие (1) заменяется двумя условиями:

$$a_1 \overset{\rho_i^*}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^*}{<} \psi(a_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{3}$$

$$a_1 \overset{\rho_i^s}{\sim} a_2 \;\Rightarrow\; \psi(a_1) \overset{\sigma_i^s}{\sim} \psi(a_2) \qquad (i = 1, 2), \tag{4}$$

а условие (2) сохраняется.

Отметим, что строгий гомоморфизм является гомоморфизмом, но обратное неверно.

Рассмотрим игру G с отношениями предпочтения и обозначим через $Opt\,G$ множество ее оптимальных решений по некоторому принципу оптимальности. Пусть K — некоторый класс игр с отношениями предпочтения, причем для каждой игры $\Gamma_j \in K$ множество ее оптимальных решений $Opt\,\Gamma_j$ считается известным. Задача состоит в установлении связи между множествами $Opt\,G$ и семейством множеств $Opt\,\Gamma_j$ $(j \in J)$. В данной работе эта связь устанавливается с помощью построения соответствующего семейства гомоморфизмов. Основным понятием для дальнейшего изложения является следующее.

Определение 1. Гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ из игры G в игру $\Gamma \in K$ называется *ковариантным*, если он сохраняет оптимальные решения игры G, т.е. образ оптимального решения игры G есть оптимальное решение игры Γ.

На теоретико-множественном языке условие ковариантности гомоморфизма f можно записать в виде $f(Opt\,G) \subseteq Opt\,\Gamma$ или, в эквивалентной форме, $Opt\,G \subseteq f^{-1}(Opt\,\Gamma)$.

Таким образом, в этом случае $f^{-1}(Opt\,\Gamma)$ задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ сверху. Если задано произвольное семейство ковариантных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ из игры G в игру $\Gamma_j \in K$, то каждое из множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$ задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ сверху.

Семейство $(f_j)_{j\in J}$ ковариантных гомоморфизмов из игры G в игру Γ_j называется *контравариантно полным*, если в совокупности оно дает точную аппроксимацию сверху для $Opt\,G$, т.е. $Opt\,G$ совпадает с пересечением множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$:

$$Opt\,G = \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j).$$

Двойственно вводятся понятия контравариантного гомоморфизма и ковариантно полного семейства контравариантных гомоморфизмов. А именно:

Гомоморфизм f из игры G в игру Γ называется *контравариантным*, если прообраз оптимального решения игры Γ есть оптимальное решение игры G, т.е. $f^{-1}(Opt\,\Gamma) \subseteq Opt\,G$.

Множество $f^{-1}(Opt\,\Gamma)$ задает аппроксимацию снизу множества оптимальных решений игры G. Если задано произвольное семейство контравариантных гомоморфизмов $(f_j)_{j\in J}$ из игры G в игру $\Gamma_j \in K$, то каждый гомоморфизм задает аппроксимацию множества $Opt\,G$ снизу. Семейство $(f_j)_{j\in J}$ контравариантных гомоморфизмов из игры G в игру Γ называется *ковариантно полным* [4], если в совокупности оно дает точную аппроксимацию снизу для $Opt\,G$, т.е. $Opt\,G$ совпадает с объединением множеств $f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j)$:

$$Opt\,G = \bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(Opt\,\Gamma_j).$$

Результаты работы, связанные с ковариантными и контравариантными гомоморфизмами игр с отношениями предпочтения общего вида, представлены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Если в качестве принципов оптимальности для игры G, а также для игр класса K рассматривать равновесие по Нэшу, то всякий сюрьективный гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ является ковариантным.*

Теорема 2. *Если в качестве принципов оптимальности для игры G, а также для игр класса K рассматривать равновесие в общем смысле, то всякий строгий гомоморфизм $f = (\varphi_1, \varphi_2, \psi)$ является контравариантным.*

2. ГОМОМОРФИЗМЫ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Дальнейшие результаты этого направления получены для антагонистических игр с упорядоченными исходами, т.е. игр, в которых отношения предпочтения являются взаимно обратными отношениями порядка. Формально *антагонистическая* игра может быть задана в виде $G = \langle X, Y, A, \omega, F\rangle$, причем $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^{-1}$.

В данном классе игр, кроме общего равновесия и равновесия по Нэшу, возникает еще один тип равновесия — Tr-равновесие.

Определение 2. Ситуация (x_0, y_0) в антагонистической игре с упорядоченными исходами называется *ситуацией Tr-равновесия*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняется $F(x_0, y) \overset{\omega}{\not<} F(x, y_0)$.

Для антагонистической игры G будем обозначать: $NEq\,G$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу, $Eq\,G$ — множество ситуаций общего равновесия, $TrEq\,G$ — множество ситуаций транзитивного равновесия.

Связь между такими множествами ситуаций имеет вид $NEq\,G \subseteq TrEq\,G \subseteq Eq\,G$, причем обратные включения не выполняются.

Если в игре G отношение порядка ω линейно, то все три типа равновесия: общее равновесие, Tr-равновесие и равновесие по Нэшу совпадают и превращаются в принцип седловой точки. Для антагонистической игры G с линейно упорядоченными исходами через $Sp\,G$ будем обозначать множество ее седловых точек.

Приведем теперь примеры полных семейств гомоморфизмов.

Пример 1. Пусть G — антагонистическая игра с упорядоченными исходами, K — класс антагонистических игр с линейно упорядоченными исходами. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Возьмем в качестве принципа оптимальности в игре G транзитивное равновесие, а в классе K — принцип седловой точки. Пусть при каждом $j \in J$ тройка отображений $f_j = (\varphi_j^1, \varphi_j^2, \psi_j)$ является строгим гомоморфизмом из игры G в игру $\Gamma_j \in K$. Тогда $(f_j)_{j\in J}$ является ковариантно полным семейством контравариантных гомоморфизмов.*

Доказательство. Введем обозначения: $\Gamma_j = \langle U_j, V_j, B_j, \sigma_j, \Phi_j\rangle$, $f_j(x_0, y_0) := (\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0))$, где $\varphi_j^1 \colon X \to U_j$, $\varphi_j^2 \colon Y \to V_j$, $\psi_j \colon A \to B_j$. Нужно доказать

$$(x_0, y_0) \in TrEq\,G \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, j \in J)\;\; f_j(x_0, y_0) \in Sp\,\Gamma_j. \tag{5}$$

Импликация слева направо основана на следующем факте.

Лемма. *Если в упорядоченном множестве $(A, \leq)$ выделены два подмножества $P, Q \subseteq A$, такие что $p \not> q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$, то существует строго изотонное отображение f из A в некоторое линейно упорядоченное множество, при котором $f(p) \leq f(q)$ для любых $p \in P$, $q \in Q$.*

Докажем прямую импликацию в (5). Пусть (x_0, y_0) — ситуация Tr-равновесия в игре G, т.е. $F(x, y_0) \overset{\omega}{\not>} F(x_0, y)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Согласно лемме существует (B, σ) — линейно упорядоченное множество и строго изотонное отображение $\psi \colon A \to B$, такое что $\psi(F(x, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y))$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Полагая $x = x_0$, получаем $\psi(F(x_0, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y))$, а полагая $y = y_0$, имеем $\psi(F(x, y_0)) \overset{\sigma}{\leq} \psi(F(x_0, y_0))$.

Объединяя два последних соотношения, получаем, что ситуация (x_0, y_0) является седловой точкой в игре $\Gamma = \langle X, Y, B, \sigma, \psi \circ F\rangle$, которая является игрой с линейно упорядоченными исходами, причем тройка отображений $(\Delta_X, \Delta_Y, \psi)$ есть строгий гомоморфизм из G в Γ.

Докажем теперь импликацию справа налево в (5). Пусть при некотором $j \in J$ ситуация $f_j(x_0, y_0)$ — седловая точка игры Γ_j. Надо показать, что (x_0, y_0) — ситуация транзитивного равновесия в игре G. Предположим противное, т.е. что ситуация (x_0, y_0) не является ситуацией Tr-равновесия. Тогда при некоторых $x' \in X$, $y' \in Y$ выполняется соотношение $F(x_0, y') \overset{\omega}{<} F(x', y_0)$.

Так как гомоморфизм f_j — строгий, то согласно (3) в игре Γ_j имеет место

$$\psi_j(F(x_0, y')) \overset{\sigma_j}{<} \psi_j(F(x', y_0)). \tag{6}$$

Согласно (2) соотношение (6) принимает вид

$$\Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y')) \overset{\sigma_j}{<} \Phi_j(\varphi_j^1(x'), \varphi_j^2(y_0)). \tag{7}$$

С другой стороны, так как $f_j(x_0, y_0) = (\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0))$ — седловая точка в игре Γ_j, то

$$\Phi_j(\varphi_j^1(x), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y)). \tag{8}$$

Полагая в (8) $x = x'$, $y = y'$ получим $\Phi_j(\varphi_j^1(x'), \varphi_j^2(y_0)) \overset{\sigma_j}{\leq} \Phi_j(\varphi_j^1(x_0), \varphi_j^2(y'))$, что противоречит соотношению (7). Теорема доказана. □

Пример 2. Пусть G — антагонистическая игра с упорядоченными исходами, K — класс ее линейных доупорядочений, $Opt\, G$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу; для каждой игры $\Gamma_j \in K$ в качестве $Opt\, \Gamma_j$ выступает множество седловых точек. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Семейство тождественных гомоморфизмов $(f_j)_{j \in J}$ является контравариантно полным семейством ковариантных гомоморфизмов.*

Утверждение теоремы 4 означает справедливость равносильности:

$$(x_0, y_0) \in NEq\, G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ j \in J)\ \ (x_0, y_0) \in Sp\, \Gamma_j, \quad \text{т.е.} \quad NEq\, G = \bigcap_{j \in J} Sp\, \Gamma_j.$$

Для доказательства теоремы используем теорему Душника -- Миллера, которая утверждает, что всякое отношение порядка может быть представлено как пересечение всех его линейных доупорядочений. По определению справедлива равносильность:

$$(x_0, y_0) \in NEq\, G \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ x \in X)(\forall\ y \in Y)\ F(x, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0, y_0) \overset{\omega}{\leq} F(x_0, y).$$

Учитывая, что по теореме Душника – Миллера $\omega = \bigcap_{j \in J} \omega_j$, получаем, что правая часть этой эквивалентности равносильна тому, что при всех $x \in X$, $y \in Y$ выполняется

$$(\forall\ j \in J)\ \ F(x, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0, y_0) \overset{\omega_j}{\leq} F(x_0, y).$$

Последнее означает, что $(\forall\ j \in J)$ $(x_0, y_0) \in Sp\, \Gamma_j$, т.е. $(x_0, y_0) \in \bigcap_{j \in J} Sp\, \Gamma_j$. Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Савина Т.Ф.* Ситуации равновесия в играх с отношениями предпочтения // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 131–132.
2. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
3. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. статей. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
4. *Розен В.В.* Нахождение оптимальных решений методом построения ковариантно полных семейств контравариантных гомоморфизмов // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 349–350

УДК 501.1

О ГОМОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ ГИПЕРГРАФОВ

Е.В. Хворостухина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

В работе описано строение сюрьективных гомоморфизмов полугрупп эндоморфизмов эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами.

Ключевые слова: гомоморфизм, гиперграф, полугруппа эндоморфизмов.

On Homomorphisms of Endomorphism Semigroups of Hypergraphs

E.V. Khvorostukhina

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: katyanew2007@rambler.ru

In the paper we describe a structure of surjective homomorphisms of endomorphism semigroups of effective hypergraphs with p-definable edges.

Key words: homomorphism, hypergraph, semigroup of endomorphisms.