Пусть терема верна для $n = m - 1$ и пусть $\pi_i(X) = 0$ для $i = \overline{1, m-1}$, $m \geq 3$. Тогда из (2) и предложения индукции следует, что $H_i(\Omega(X, x_0)) = 0$ при $0 < i \leq m - 1$ и $\pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong$ $\cong H_m(\Omega(X, x_0))$. Отсюда, используя (2), предложение индукции и (4), получаем

$$\pi_{m+1}(X) \cong \pi_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_m(\Omega(X, x_0)) \cong H_{m+1}(X),$$

так как при $m \geq 3$, $m < 2m - 2 = 2p - 2$. И по тем же соображениям при $1 < i < m - 1$ имеем $i < 2p - 2$ и $H_i(X) \cong H_{i-1}(\Omega(X, x_0)) = 0$. $\square$

Библиографический список

1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. С. 93–106.
2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С.И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 64–97.
4. *Сусин М.Н.* Слабая толерантность в пространстве толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 121–131.
5. *Небалуев С.И., Кляева И.А., Сусин М.Н.* Построение спектральной последовательности толерантного расслоения // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5. С. 94–118.
6. *Серр Ж.-П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств. Расслоенные пространства и их приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

УДК 517.9

О ПОЛНОТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИНГУЛЯРНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Д.В. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительной математики и математической физики
E-mail: poplavskydv@mail.ru

В статье приводится теорема о полноте специальных вектор-функций, инициированных произведениями так называемых решений Вейля дифференциального уравнения четвертого порядка и их производными на полуоси. Доказывается, что такие нелинейные комбинации решений Вейля и их производных образуют линейное подпространство убывающих на бесконечности решений линейной сингулярной дифференциальной системы типа Камке. Строится и исследуется функция Грина соответствующей сингулярной краевой задачи на полуоси для пучков операторов, определяющих дифференциальную систему типа Камке. Используя аналитические и асимптотические свойства функции Грина, методы спектральной теории операторов и теории аналитических функций, доказывается искомая теорема о полноте.

Ключевые слова: теорема о полноте, произведения решений Вейля, краевые задачи, функция Грина.

About Completeness of Products of Functions, Initiated by Singular Differential Equations

D.V. Poplavsky

Saratov State University,
Chair of Numerical Analysis and Mathematical Physics
E-mail: poplavskydv@mail.ru

In this article we introduced the completeness theorem for special vector-functions, initiated by products of Weil solutions of forth order differential equation and its derivatives on the halfline. We prove that such nonlinear combinations of Weil solutions and its derivatives form the linear subspace of solutions, which decrease to infinity, of linear singular Kamke-type differential system. Then we construct and investigate Green function of corresponding singular boundary problem for the operator-pencils, which determine Kamke-type differential system. With help of analytic and asymptotic properties of Green function, methods of spectral theory of operators and theory of analytic functions we prove the required completeness theorem.

Key words: completeness theorem, products of Weil's solutions, boundary problems, Green's function.

Вопросы, связанные с исследованием полноты произведений решений дифференциальных уравнений, достаточно часто встречаются в различных задачах спектральной теории (см., напр., [1–4]). Приведенная в данной работе теорема о полноте может быть использована при исследовании вопроса разрешимости смешанной задачи на полуоси для системы Богоявленского [5].

Прежде чем сформулировать основной результат (теорема 1) введем необходимые понятия и факты. При $x \geq 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$ly := y^{(4)} + (p_2(x)y')' + p_0(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

где $p_0(x)$, $p_2(x)$ — достаточно гладкие комплекснозначные функции и при этом $p_0(x)$, $p_2^{(\nu)}(x) \in L(0,\infty)$, $\nu = 0,1$. Сопоставим уравнению (1) (пока формально) следующие векторные уравнения типа Камке:

$$L_\lambda Y(x) := Y^{(7)}(x) + \sum_{j=0}^{5} P_j(x)Y^{(j)}(x) - \lambda(\Omega Y^{(3)}(x) + \sum_{j=0}^{1} R_j(x)Y^{(j)}(x)) = 0, \tag{2}$$

$$L_\lambda^* Z(x) := -Z^{(7)}(x) - \sum_{j=0}^{5} Z^{(j)}(x)P_j^*(x) + \lambda(Z^{(3)}(x)\Omega + \sum_{j=0}^{1} Z^{(j)}(x)R_j^*(x)) = 0, \tag{3}$$

$$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x))^T, \quad Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x)), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 36 & 10 \\ -80 & -24 \end{pmatrix},$$

где матрицы $P_k(x), P_k^*(x), R_i(x), R_i^*(x)$ определены в [6] и строятся через коэффициенты уравнения (1). Предполагаем, что $P_k(x)$, $k = \overline{2,5}$, $(1+x^2)P_0(x)$, $(1+x)P_1(x)$, $(1+x^2)R_0(x)$, $(1+x)R_1(x) \in C(0,\infty) \bigcap L(0,\infty)$. Отметим, что для достаточно гладких $Y(x)$ и $Z(x)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty Z(x)L_\lambda Y(x)\,dx = \langle Z(x), Y(x)\rangle|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty L_\lambda^* Z(x)Y(x)\,dx,$$

$$\langle Z, Y\rangle := \sum_{j=1}^{7}(-1)^{j+1}Z^{(j-1)}Y^{(7-j)} + \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}(ZP_k)^{(j-1)}Y^{(k-j)} -$$

$$-\lambda\Big(\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}Z^{(j-1)}\Omega Y^{(3-j)} - ZR_1Y\Big).$$

Лемма 1. *Пусть $y(x)$ и $z(x)$ есть решения уравнения* (1)*, такие что при каждом фиксированном $x \geq 0$ функция $(\xi - x)y'(\xi)z'(\xi) \in L(x,\infty)$. Тогда вектор-функция $(U(x), V(x)) := (y(x)z(x), \int_x^\infty (\xi - x)y'(\xi)z'(\xi)\,d\xi)$ удовлетворяет уравнению* (3).

Замечание. Доказательство леммы 1 состоит в последовательном дифференцировании $U(x)$ и $V(x)$ с применением уравнения (1).

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$ есть решения Вейля уравнения (1) ([7, § 3.1, с. 255]), т.е. $\Phi_k^{(j-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}$, $j = \overline{1,k}$, $\Phi_k(x,\lambda) = O(e^{\rho r_k x})$, $x \to \infty$, где $\lambda = \rho^4$, δ_{jk} — символ Кронекера, r_k, $k = \overline{1,4}$ — корни уравнения $r^4 = 1$, занумерованные в каждом секторе S раствора $\pi/4$ ($\arg\rho \in (\nu\pi/4, (\nu+1)\pi/4)$, $\nu = \overline{0,7}$) так, чтобы

$$\mathrm{Re}\,(\rho r_1) < \mathrm{Re}\,(\rho r_2) < \mathrm{Re}\,(\rho r_3) < \mathrm{Re}\,(\rho r_4). \tag{4}$$

Для решений Вейля при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S$ имеют место асимптотические представления ([7, § 3.1, с. 258])

$$\Phi_k^{(j-1)}(x,\lambda) = \rho^{1-k}\sum_{m=1}^{k}(\rho r_m)^{j-1}e^{\rho r_m x}(a_{km} + O(\rho^{-1})), \quad k = \overline{1,4},$$

где a_{km} — некоторые числа.

Определим вектор-функции $\Psi_k(x,\lambda) = (\Psi_{k1}(x,\lambda), \Psi_{k2}(x,\lambda))$ следующим образом:

$$\Psi_k(x,\lambda) = (\Phi_j(x,\lambda)\Phi_p(x,\lambda), \int_x^\infty (\xi - x)\Phi_j'(\xi,\lambda)\Phi_p'(\xi,\lambda)\,d\xi),$$

где $k = p$ при $j = 1$, $p = \overline{1,3}$ и $k = 4$ при $j = p = 2$. Из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Вектор-функции* $\Psi_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,4}$ *удовлетворяют уравнению* (3).

Ниже сформулирован основной результат — теорема о полноте системы $\{\Psi_k(x,\lambda)\}_{k=\overline{1,4}}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, *где* $f_1(x),f_2(x)\in L(0,\infty)$. *Если имеют место равенства*

$$\int\limits_0^\infty \Psi_k(x,\lambda)f(x)\,dx=0, \quad k=\overline{1,4}, \qquad |\lambda|>\lambda^*, \quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0, \tag{5}$$

то $f(x)=0$ *п.в. на* $[0,\infty)$.

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании соответствующих сингулярных краевых задач для неоднородных уравнений, определяемых пучками операторов (2), (3), и реализуется в несколько этапов.

I. При фиксированных t и λ определим матрицу-функцию $g(x,t,\lambda)$ при $x\geq t$ как решение следующей задачи Коши: $L_\lambda g(x,t,\lambda)=0$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j}g(x,t,\lambda)\,|_{x=t}=0$, $j=\overline{0,5}$, $\frac{\partial^6}{\partial x^6}g(x,t,\lambda)\,|_{x=t}=E_2$ и матрицу-функцию $g^*(x,t,\lambda)$ при $x\leq t$ как решение задачи $L^*_\lambda g^*(x,t,\lambda)=0$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j}g^*(x,t,\lambda)\,|_{x=t}=0$, $j=\overline{0,5}$, $\frac{\partial^6}{\partial x^6}g^*(x,t,\lambda)\,|_{x=t}=-E_2$. Здесь и далее E_m — единичная матрица размерности m. Доопределим $g(x,t,\lambda)$ и $g^*(x,t,\lambda)$, положив $g(x,t,\lambda)=0$ при $x<t$ и $g^*(x,t,\lambda)=0$ при $x>t$. Отметим, что при фиксированных x и t матрицы-функции $g(x,t,\lambda)$ и $g^*(x,t,\lambda)$ являются целыми аналитическими по λ. Следующие две леммы устанавливают то, что $g(x,t,\lambda)$ и $g^*(x,t,\lambda)$ являются функциями Грина соответствующих задач. Обозначим через $L_{loc}(0,\infty)$ множество локально суммируемых на полуоси функций.

Лемма 2. *Пусть* $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, $f_1(x),f_2(x)\in L_{loc}(0,\infty)$ *и пусть*

$$Y(x)=\int\limits_0^x g(x,t,\lambda)f(t)\,dt. \tag{6}$$

Тогда $Y(x)$ *удовлетворяет соотношениям:*

$$L_\lambda Y(x)=f(x), \quad Y^{(j)}(0)=0, \quad j=\overline{0,6}. \tag{7}$$

Справедливо и обратное утверждение. Если $Y(x)$ *является решением задачи* (7), *то имеет место представление* (6).

Лемма 3. *Пусть* $f^*(x)=(f^*_1(x),f^*_2(x))$, $f^*_1(x)$, $f^*_2(x)$ — *финитные суммируемые функции и пусть*

$$Z(x)=\int\limits_x^\infty f^*(t)g^*(x,t,\lambda)\,dt. \tag{8}$$

Тогда $Z(x)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$L^*_\lambda Z(x)=f^*(x), \quad Z(x) \text{ — гладкая финитная вектор-функция.} \tag{9}$$

Справедливо и обратное утверждение. Если $Z(x)$ *является решением задачи* (9), *то имеет место представление* (8).

Лемма 4. *Имеет место следующее соотношение:* $g^*(x,t,\lambda)=g(t,x,\lambda)$.

II. При $x\geq 0$ и $t\geq 0$ рассмотрим матрицу-функцию

$$G^*(x,t,\lambda)=\sum_{k=1}^4 B_k(t,\lambda)\Psi_k(x,\lambda)+g^*(x,t,\lambda), \tag{10}$$

где $B_k(t,\lambda)=(B_{k1}(t,\lambda),B_{k2}(t,\lambda))^T$ определим из условий $G^*(0,t,\lambda)=0$ и $G^*_x(0,t,\lambda)=0$, т.е. $B_k(t,\lambda)$ найдем из системы $\sum\limits_{k=1}^4 B_k(t,\lambda)\Psi_k(0,\lambda)=-g^*(0,t,\lambda)$, $\sum\limits_{k=1}^4 B_k(t,\lambda)\Psi'_k(0,\lambda)=-g^*_x(0,t,\lambda)$. Данная система распадается на две системы с неизвестными $B_{k1}(t,\lambda)$ и $B_{k2}(t,\lambda)$ и определителем, отличным от нуля при $|\lambda|>\lambda^*$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$.

Учитывая условие (4) и, что $\Phi_j^{(\nu)}(x,\lambda)=O(e^{\rho r_j x})$, $j=\overline{1,3}$ при $x\to\infty$, $|\lambda|>\lambda^*$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, находим $\Psi_k^{(\nu)}(x,\lambda)\to 0$, $k=\overline{1,4}$, $x\to\infty$, $|\lambda|>\lambda^*$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Тогда из представления (10) при фиксированных λ, $|\lambda|>\lambda^*$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ и t, принадлежащем некоторому компакту из $[0,\infty)$, следует, что $G^{*(\nu)}(x,t,\lambda)\overset{\exp}{\to}0$, $\nu=\overline{0,6}$, $x\to\infty$. Здесь и в дальнейшем символ $\overset{\exp}{\to}$ означает экспоненциальное стремление.

Лемма 5. *Пусть* $f^*(x)=(f_1^*(x),f_2^*(x))$, $f_1^*(x),f_2^*(x)$— *финитные суммируемые функции и пусть* $Z(x)=\int\limits_0^\infty f^*(t)G^*(x,t,\lambda)\,dt$. *Тогда* $Z(x)$ *при фиксированном* $\lambda(|\lambda|>\lambda^*,\ Im\,\lambda\neq 0)$ *удовлетворяет соотношениям* $L_\lambda^*Z(x)=f^*(x)$, $Z(0)=Z'(0)=0$, $Z^{(\nu)}(x)\overset{\exp}{\to}0$, $\nu=\overline{0,6}$, $x\to\infty$.

Доказательство леммы 5 основано на применении следствия 1 и леммы 3.

III. Рассмотрим так называемое «простейшее» уравнение вида (2), т.е. уравнение с переменными коэффициентами, равными тождественному нулю,

$$L_\lambda^0 Y(x):=Y^{(7)}(x)-\lambda\Omega Y^{(3)}(x)=0,\quad x\geq 0. \tag{11}$$

В этом пункте построим функцию Грина сингулярной краевой задачи для неоднородного уравнения, записанного с помощью оператора (11). Для этого введем фундаментальную систему решений $X_k(x,\lambda)=(X_{k1}(x,\lambda),X_{k2}(x,\lambda))^T$, $k=\overline{1,14}$, удовлетворяющую условиям $X_k^{(m)}(0,\lambda)=(\delta_{k-1,2m},\delta_{k-2,2m})^T$, $m=\overline{0,6}$, $k=\overline{1,14}$. Также рассмотрим фундаментальную систему решений $N_k(x,\lambda)=(N_{k1}(x,\lambda),N_{k2}(x,\lambda))^T$, $k=\overline{1,14}$, такую что $N_k(x,\lambda)=X_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,6}$ и $N_{k+6}(x,\lambda)=(e^{\rho\omega_k x},\beta_k e^{\rho\omega_k x})^T$, $k=\overline{1,8}$, где $\omega_k^4=-4$, $\beta_k=-4$ при $k=1,2,5,6$ и $\omega_k^4=16$, $\beta_k=-2$ при $k=3,4,7,8$. При этом в каждом секторе S имеют место неравенства $\operatorname{Re}(\rho\omega_1)<\operatorname{Re}(\rho\omega_2)<\operatorname{Re}(\rho\omega_5)<\operatorname{Re}(\rho\omega_6)$ и $\operatorname{Re}(\rho\omega_3)<\operatorname{Re}(\rho\omega_4)<\operatorname{Re}(\rho\omega_7)<\operatorname{Re}(\rho\omega_8)$.

Определим матрицу-функцию

$$G_0(x,t,\lambda)=\sum_{k=1}^4 X_{k+10}(x,\lambda)A_k(t,\lambda)+g_0(x,t,\lambda), \tag{12}$$

где $g_0(x,t,\lambda)$ — функция Грина задачи $L_\lambda^0Y(x)=f(x)$, $Y^{(j)}(0)=0$, $j=\overline{0,6}$.

Используя разложения $X_k(x,\lambda)=\sum\limits_{\nu=1}^{14}\alpha_{\nu,k}(\lambda)N_\nu(x,\lambda)$, $k=\overline{1,14}$, определим вектор-функции $A_k(t,\lambda)=(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda))$, $k=\overline{1,4}$ из условия обнуления в представлении (12) растущих по x экспонент, которое имеет вид

$$\sum_{k=1}^4\alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda))+(\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda))e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}=0,\quad \nu=\overline{11,14}.$$

После определения $A_k(t,\lambda)$ представление (12) примет вид

а) при $x\geq t$

$$G_0(x,t,\lambda)=\sum_{\nu=7}^{10}\begin{pmatrix}N_{\nu1}(x,\lambda)\\N_{\nu2}(x,\lambda)\end{pmatrix}\left(\sum_{k=1}^4\alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda))+(\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda))e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}\right)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^6\begin{pmatrix}N_{\nu1}(x,\lambda)\\N_{\nu2}(x,\lambda)\end{pmatrix}\sum_{k=1}^4\alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda))+\sum_{\nu=1}^6\begin{pmatrix}N_{\nu1}(x-t,\lambda)\\N_{\nu2}(x-t,\lambda)\end{pmatrix}(\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda));$$

б) при $x\leq t$

$$G_0(x,t,\lambda)=\sum_{\nu=1}^{10}\begin{pmatrix}N_{\nu1}(x,\lambda)\\N_{\nu2}(x,\lambda)\end{pmatrix}\sum_{k=1}^4\alpha_{\nu,k+10}(\lambda)(A_{k1}(t,\lambda),A_{k2}(t,\lambda))-$$
$$-\sum_{\nu=11}^{14}\begin{pmatrix}N_{\nu1}(x,\lambda)\\N_{\nu2}(x,\lambda)\end{pmatrix}(\alpha_{\nu,13}(\lambda),\alpha_{\nu,14}(\lambda))e^{-\rho\omega_{\nu-6}t}.$$

Кроме этого имеем $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(0,t,\lambda)=0$, $j=\overline{0,4}$ и $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(x,t,\lambda)=O(\frac{1+x^{2-j}}{\rho^4})$, $j=0,1$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_0(x,t,\lambda)=O(\rho^{j-6})$, $j=\overline{2,6}$.

Лемма 6. *Пусть* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x), f_2(x) \in L(0,\infty)$ *и пусть* $Y(x) = \int\limits_0^\infty G_0(x,t,\lambda)f(t)\,dt$. *Тогда* $Y(x)$ *удовлетворяет соотношениям* $L_\lambda^0 Y(x) = f(x)$, $Y^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0,4}$, $Y^{(j)}(x) = O(1 + x^{2-j})$, $j = 0, 1, Y^{(j)}(x) = O(1)$, $j = \overline{2,6}$, $x \to \infty$.

IV. В этом пункте построим функцию Грина $G(x,t,\lambda)$ соответствующей сингулярной краевой задачи для неоднородного уравнения, записанного с помощью оператора (2). Для этого применим метод возмущения простейшего уравнения (11). А именно при фиксированных t и λ определим совокупность матриц-функций $G(x,t,\lambda)$ и $G_k(x,t,\lambda)$, $k = \overline{1,5}$ как решение следующей системы интегральных уравнений

$$G(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) - \int\limits_0^\infty G_0(x,s,\lambda)J(s,t,\lambda)\,ds, G_k(x,t,\lambda) =$$

$$= G_0^{(k)}(x,t,\lambda) - \int\limits_0^\infty G_0^{(k)}(x,s,\lambda)J(s,t,\lambda)\,ds,\ k = \overline{1,5}, \tag{13}$$

где $J(s,t,\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{5} P_i(s)G_i(s,t,\lambda) + P_0(s)G(s,t,\lambda) - \lambda(R_1(s)G_1(s,t,\lambda) + R_0(s)G(s,t,\lambda))$.

Лемма 7. *При фиксированных* $t \ge 0$ *и* λ $(|\lambda| > \lambda^*,\ \mathrm{Im}\,\lambda \ne 0)$ *система интегральных уравнений (13) имеет единственное решение* $G(x,t,\lambda)$ *и* $G_k(x,t,\lambda)$, $k = \overline{1,5}$. *При этом имеют место неравенства:* $|G(x,t,\lambda)| \le C\frac{1+x^2}{|\rho|^4}$, $|G_1(x,t,\lambda)| \le C\frac{1+x}{|\rho|^4}$, $|G_j(x,t,\lambda)| \le C|\rho|^{j-6}$, $j = \overline{2,5}$, $|\frac{\partial}{\partial x}G_5(x,t,\lambda)| \le C$.

Лемма 8. *При фиксированных* $t \ge 0$ *и* λ $(|\lambda| > \lambda^*,\ \mathrm{Im}\,\lambda \ne 0)$ *матрицы-функции* $G(x,t,\lambda)$ *и* $G_k(x,t,\lambda)$, $k = \overline{1,5}$ *имеют следующие свойства: 1)* $G_k(x,t,\lambda) = \partial^k/\partial x^k G(x,t,\lambda)$, $k = \overline{1,5}$*; 2)* $\partial^6/\partial x^6 G(x,t,\lambda)$ *— непрерывная по* $x \in [0,t)\cup(t,\infty)$ *и* $\partial^6/\partial x^6 G(t+0,t,\lambda) - \partial^6/\partial x^6 G(t-0,t,\lambda) = E_2$*; 3)* $G(0,t,\lambda) = \partial^k/\partial x^k G(0,t,\lambda) = 0$, $k = \overline{1,4}$*; 4)* $L_\lambda G(x,t,\lambda) = 0$.

Лемма 9. *Пусть* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x), f_2(x) \in L(0,\infty)$ *и пусть* $Y(x) = \int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$ *при* $|\lambda| > \lambda^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$. *Тогда* $Y(x)$ *удовлетворяет соотношениям:*

$$\begin{gathered} L_\lambda Y(x) = f(x), \qquad Y^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0,4}, \\ Y^{(j)}(x) = O(1 + x^{2-j}), \quad j = 0,1, \qquad Y^{(j)}(x) = O(1), \quad j = \overline{2,6}, \quad x \to \infty. \end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, $G(x,t,\lambda)$ можно назвать функцией Грина краевой задачи (14).

Лемма 10. *При* $x \ge 0$, $t \ge 0$ *и* $|\lambda| > \lambda^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$ *имеет место следующее соотношение:* $G^*(x,t,\lambda) = G(t,x,\lambda)$.

Из представления (10), лемм 4 и 10 вытекает важное следствие.

Следствие 2. *При* $x \ge 0$, $t \ge 0$ *и* $|\lambda| > \lambda^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$ *имеет место представление*

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} B_k(x,\lambda)\Psi_k(t,\lambda) + g(x,t,\lambda). \tag{15}$$

V. Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 1. Положим $Y(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$. Используя лемму 9 при $|\lambda| > \lambda^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$, находим

$$L_\lambda Y(x,\lambda) = f(x). \tag{16}$$

Далее, с помощью представления (15) и условия (5) последовательно вычисляем

$$Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} B_k(x,\lambda)\int\limits_0^\infty \Psi_k(t,\lambda)f(t)\,dt + \int\limits_0^x g(x,t,\lambda)f(t)\,dt = \int\limits_0^x g(x,t,\lambda)f(t)\,dt. \tag{17}$$

Так как при фиксированных x и t матрица-функция $g(x,t,\lambda)$ является целой по λ, то из равенства (17) вытекает, что $Y(x,\lambda)$ также является целой. С другой стороны, в силу леммы 7 $Y(x,\lambda)$ убывает при $|\lambda| \to \infty$. Следовательно, по теореме Лиувилля (см., напр., [8, с. 209]) имеем $Y(x,\lambda) \equiv 0$. Учитывая последнее, из равенства (16) следует, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0,\infty)$. Теорема 1 доказана.

Библиографический список

1. *Borg G.* Eine umkehrung der Sturm-Liouvillischen eigenwertaufgabe bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte // Acta Math. (Uppsala). 1946. V. 78. P. 1–96.

2. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* О разложении по произведениям некоторых решений двух уравнений Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. С. 781–784.

3. *Христов Е.Х.* О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма – Лиувилля на полуоси // Диф. уравнения. 1980. № 16. С. 23–29.

4. *Yurko V.A.* The Inverse Spectral Problem for Differential Operators with Nonseparated Boundary Conditions // J. Math. Analysis and Applications. 2000. № 250. P. 266–289.

5. *Поплавский Д.В.* О разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 98–101.

6. *Поплавский Д.В.* Прямые и обратные задачи спектрального анализа и их приложения к нелинейным эволюционным операторам: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Сарат. ун-т. Саратов, 2006. 116 с.

7. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

8. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.

УДК 517.518.85

ОШИБКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

В статье приводится оценка ошибки равномерного приближения дифференцируемых функций многих переменных с ограниченной производной второго порядка линейными интерполяционными операторами, сохраняющими свойство положительности и выпуклости приближаемых функций.

Ключевые слова: формосохраняющее приближение, оптимальная интерполяция.

The Error of Approximation of Differentiable Functions of Several Variables by Means of Interpolatory Shape-Preserving Operators

S.P. Sidorov

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

The article deals with the estimation of the error of uniform approximation of differentiable functions of several variables with limited second derivations by means of linear interpolation operators, which preserve the properties of positivity and convexity of approximated functions.

Key words: shape-preserving approximation, optimal interpolation.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.). Раздел теории приближений, посвященный возникающим задачам, называется *теорией формосохраняющего приближения*. Обзор некоторых результатов теории формосохраняющего приближения можно найти в книге [1].

Пусть $p, r \in \mathbb{N}$, $p, r \geq 2$, $C[0,1]^r$ есть пространство непрерывных на множестве $[0,1]^r$ функций, $\|f\| = \sup_{(x_1,\dots,x_r)\in[0,1]^r} |f(x_1,\dots,x_r)|$. Обозначим $A = \{(x_1^{[i_1]},\dots,x_r^{[i_r]}) : \ 0 \leq i_j \leq p\} \subset [0,1]^r$ множество точек, координаты которых лежат в узлах многомерной сетки $\left(\frac{i_1}{p},\dots,\frac{i_r}{p}\right) \in [0,1]^r$, $i_j \in \{0,1,\dots,p\}$. Множество A содержит $n = (p+1)^r$ точек, перенумеруем их и обозначим $a^{[i]}$, $i = 1,\dots,n$. Пусть $V \subset C[0,1]^r$ означает конус всех положительных и выпуклых на $[0,1]^r$ функций.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(V)$ множество всех линейных операторов L_n, определенных в $C[0,1]^r$, со значениями в $C[0,1]^r$, вида