тов, 1988. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.88, № 3763-В88. [*Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N.* Computer Modelling of the Strapdown INS, Which Determines the Orientation of an Object in the Orthodromic and Geographical Frames / Saratov Polytechnic Institute, 1988. 21 p.]

6. *Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н.* Моделирование работы БИНС на универсальных ЭВМ / Сарат. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.89, № 3909-В89. [*Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N.* Computer Modelling of the Strapdown INS / Saratov Polytechnic Institute, 1989. 15 p.]

7. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твёрдого тела и материальных систем : автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1987. 36 с. [*Chelnokov Yu. N.* Quaternion and Bi-quaternion Methods in the Problems of Solid Body Mechanics and Material Systems : Abstract of dissertation. Moscow, 1987. 36 p.]

8. *Челноков Ю. Н., Петров С. В.* О задачах ориентации и навигации объекта в географической и ортодромической системах координат. Деп. в ВИМИ 27.05.88, Д07701. 21 с. [*Chelnokov Yu. N., Petrov S. V.* On the Problems of Orientation and Novigation of an Object in Geographical and Orthodromic Frames. 1988. 21 p. ]

9. *Челноков Ю. Н., Челнокова Л. А., Ланденок И. В.* Алгоритм идеальной работы системы ориентации для подвижного объекта // Вопросы авиационной науки и техники : сб. тр. М., 1988. Вып. 10. С. . 17–24. [*Chelnokov Yu. N., Chelnokova L. A., Landenok I. V.* Algorithm of Ideal Functioning of Orientation System for a Moving Object // Problems of Aviation. Moscow, 1988. Iss. 10. P. 17–24.]

10. *Челноков Ю. Н.* Инерциальная ориентация и навигация движущихся объектов : учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2002. 64 с. [*Chelnokov Yu. N.* Inertial Orientation and Navigation for Moving Objects : Study Guide. Saratov, 2002. 64 p.]

11. *Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю.* Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 64—72. [*Chelnokov Yu. N., Loginov M. Yu.* Differential Error Equation of a Corrected INS, Functioning in a Normal Geographical Frame // Mechatronics, Automation, Control. 2009. № 10. P. 64–72.]

УДК 629

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

**И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков**

Саратовский государственный университет
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионных уравнений решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной сумме времени переориентации орбиты КА и импульса управления за время переориентации орбиты или затрат энергии. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Приведены законы оптимального управления, условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Построены примеры численного решения задачи.

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион.

**Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation**

**I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov**

The problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process, is weighted sum of time and impulse (or square) of control. We have formulated a differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. Optimal control laws, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of numerical solution of the problem are given.

**Key words:** spacecraft, orbit, optimal control, quaternion.

## 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Будем считать, что вектор ускорения $\boldsymbol{u}$ от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат $X$ – геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре $O$ притяжения Земли. Ось $OX_3$ этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси $OX_1$ и $OX_2$ лежат в плоскости экватора Земли, ось $OX_1$ направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось $OX_2$ дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение систему координат $\xi$, связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре $O$, ось $\xi_1$ направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось $\xi_3$ перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора $\boldsymbol{c}$ момента скорости центра масс КА, а ось $\xi_2$ образует правую тройку с осями $\xi_1$ и $\xi_3$. Ориентация системы координат $\xi$ в инерциальной системе координат $X$ характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла $\Omega_u$, наклоном орбиты $I$ и угловым расстоянием перицентра от узла $\omega_\pi$.

В работах [1–4] изучалась задача переориентации орбиты КА с использованием дифференциальных уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), имеющих вид [5–7]:

$$2\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda} \circ u\frac{r}{c}\left(\cos\varphi \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{i}_2\right), \tag{1}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \qquad c = \mathrm{const},$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \Lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \Lambda_3\boldsymbol{i}_3$ — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\Lambda_j \quad (j = \overline{0,3})$ — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат $\xi$) в инерциальной системе координат $X$; $\circ$ — символ кватернионного умножения; $r$ — модуль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ центра масс КА; $\varphi$ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; $c$ — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ центра масс КА); $p$ и $e$ — параметр и эксцентриситет орбиты; $u$ — проекция вектора ускорения $\boldsymbol{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА).

Наряду с уравнениями (1) ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера $\Lambda_j$ для решения задачи переориентации орбиты КА могут быть использованы уравнения ориентации орбитальной системы координат $\eta$ в параметрах Эйлера $\lambda_j$, имеющие вид [6, 8, 9]:

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \qquad \boldsymbol{\omega}_\eta = u\frac{r}{c}\boldsymbol{i}_1 + \frac{c}{r^2}\boldsymbol{i}_3, \tag{2}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \qquad c = \mathrm{const}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{i}_1 + \lambda_2\boldsymbol{i}_2 + \lambda_3\boldsymbol{i}_3$ — кватернион ориентации орбитальной системы координат $\eta$ в инерциальной системе координат $X$ (ось $\eta_1$ этой системы координат направлена вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ центра масс КА, а ось $\eta_3$ перпендикулярна плоскости орбиты (параллельна оси $\xi_3$)). Кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ ориентации орбиты КА соотношением

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}_3\sin\frac{\varphi}{2}\right);$$

$\boldsymbol{\omega}_\eta$ — отображение вектора $\boldsymbol{\omega}$ на базис $\eta$, где $\lambda_j$, $j = \overline{0,3}$ — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбитальной системы координат; $\omega_1$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3$ — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат на ее же координатные оси.

Параметры $\lambda_j$ связаны с угловыми переменными $\Omega_u$, $I$, $\omega_\pi$, $\varphi$ соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u+\omega_\pi+\varphi}{2}\right), \qquad \lambda_1 = \sin\frac{I}{2}\cos\left(\frac{\Omega_u-\omega_\pi-\varphi}{2}\right), \\ \lambda_2 &= \sin\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u+\omega_\pi+\varphi}{2}\right), \qquad \lambda_3 = \cos\frac{I}{2}\sin\left(\frac{\Omega_u-\omega_\pi-\varphi}{2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Использование уравнений (2), описывающих ориентацию орбитальной системы координат, для решения задачи переориентации орбиты имеет свои преимущества перед использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты (1). Так, уравнение (2) является при $r = \text{const}$ (в случае круговой орбиты) и $u = \text{const}$ линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, в то время как уравнение (1) в этом случае является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Поэтому уравнение (2) более удобно и эффективно в сравнении с уравнением (1) с аналитической точки зрения. (Аналитическое решение уравнений ориентации круговой орбиты (1) для случая постоянного управления было найдено в [10].)

Настоящая статья развивает исследования задачи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат, начатые в [11]. При этом, в отличие от работ [1–3], удалось построить эффективные алгоритмы и программы численного решения задачи для широкого диапазона изменения параметров ориентации орбит КА и коэффициентов функционалов качества.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Требуется определить ограниченное по модулю управление $\boldsymbol{u}$:

$$-u_{\max} \leqslant u \leqslant u_{\max} < \infty, \qquad u = \pm|\boldsymbol{u}| \tag{5}$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (2), (3), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \boldsymbol{i}_3\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) \tag{6}$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* =?, \qquad \varphi(t^*) = \varphi^*, \qquad \boldsymbol{\lambda}(t^*) = \pm\boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi^*}{2} + \boldsymbol{i}_3\sin\frac{\varphi^*}{2}\right) \tag{7}$$

и минимизирующее функционал $J_1 = \int\limits_0^{t^*} \left(\alpha_1 + \alpha_2 u^2\right) dt$ или функционал $J_2 = \int\limits_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2|u|)\, dt$, $\alpha_1,\ \alpha_2 = \text{const} \geq 0$.

При $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстродействия; при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ минимум функционала $J_2$ означает минимум характеристической скорости [12].

Фигурирующая в краевых условиях кватернионная переменная $\boldsymbol{\Lambda}$ характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная $\varphi$ — положение КА на орбите. Величины $c$, $p$, $e$, $\varphi_0$, $\boldsymbol{\Lambda}^0$ и $\boldsymbol{\Lambda}^*$ заданы (начальное и конечное значения кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты $\Omega_u$, $I$, $\omega_\pi$ по формулам, аналогичным(4)). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины $t^*$, $\varphi^*$.

Четыре компоненты $\Lambda_j$ кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ удовлетворяют условию $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + {} + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие (7), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\operatorname{vect}\left[\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi^*}{2} + \boldsymbol{i}_3\sin\frac{\varphi^*}{2}\right)\right] = 0, \tag{8}$$

эквивалентное трем скалярным (в (8) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион). Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

## 3. ЗАКОНЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [13]. Для этого введем дополнительные переменные $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \boldsymbol{i}_1 + \mu_2 \boldsymbol{i}_2 + \mu_3 \boldsymbol{i}_3$ и $\chi$, сопряженные по отношению к фазовым переменным $\boldsymbol{\lambda}$ и $\varphi$. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \frac{1}{2}\left[\frac{r}{c}\nu_1 u + \frac{c}{r^2}(\nu_3 + 2\chi)\right],$$

где $\nu_1$, $\nu_3$ — компоненты кватерниона $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$; для функционала $J_1$ $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$, для функционала $J_2$ $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$, в случае быстродействия $\sigma = 1$.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\eta}}, \tag{9}$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \left[\frac{1}{r}(\nu_3 + 2\chi)\nu_1 u - \frac{r^2}{2c^2}\nu_1 u\right]\frac{dr}{dt}. \tag{10}$$

Отметим, что сопряженное уравнение (9) совпадает по своей форме с фазовым уравнением (1), поскольку кватернионное уравнение (1) обладает свойством самосопряженности.

Законы оптимального управления (т. е. законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности) находятся из условий максимума функции $H$ по переменной $u$ с учетом наложенного ограничения (5) и имеют вид

1) в случае $\sigma = 1$ (быстродействия)

$$u^o = u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1; \tag{11}$$

2) случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^o = \begin{cases} \dfrac{1}{4\alpha_2}\dfrac{r}{c}\nu_1, \text{ если } \dfrac{1}{4\alpha_2}\dfrac{r}{c}|\nu_1| \le u_{\max}, \\ u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1, \text{ если } \dfrac{1}{4\alpha_2}\dfrac{r}{c}|\nu_1| > u_{\max}; \end{cases} \tag{12}$$

3) в случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^o = \begin{cases} u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1, \text{ если } \dfrac{1}{2\alpha_2}\dfrac{r}{c}|\nu_1| - 1 \ge 0, \\ 0, \text{ если } \dfrac{1}{2\alpha_2}\dfrac{r}{c}|\nu_1| - 1 < 0, \\ u = u_{\text{особ}} \in [-u_{\max}, u_{\max}], \text{ если } \dfrac{1}{2\alpha_2}\dfrac{r}{c}|\nu_1| - 1 \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Случай особого управления $u_{\text{особ}}$, когда $r|\nu_1| \equiv 2\alpha_2 c$ на некотором промежутке времени $[t_*; t_{**}]$ в работе не рассматривается.

## 4. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Вводя неопределенные множители Лагранжа $A_1$, $A_2$, $A_3$, получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (8):

$$\text{при} \quad t = t^* \qquad \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \boldsymbol{A} = 0, \qquad \boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{i}_1 + A_2 \boldsymbol{i}_2 + A_3 \boldsymbol{i}_3, \qquad \chi + \frac{A_3}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0. \tag{14}$$

Из (14) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\Lambda_0^*\mu_0 + \Lambda_1^*\mu_1 + \Lambda_2^*\mu_2 + \Lambda_3^*\mu_3 = 0, \qquad 2\chi + (\Lambda_0^*\mu_3 - \Lambda_1^*\mu_2 + \Lambda_2^*\mu_1 - \Lambda_3^*\mu_0)\cos\frac{\varphi}{2} = 0. \tag{15}$$

Вместо условий (15) могут быть использованы другие формы условий трансверсальности, получаемые из (14) и имеющие вид

$$\text{при} \quad t = t^* \qquad \nu_0 \cos\frac{\varphi}{2} - \nu_3 \sin\frac{\varphi}{2} = 0, \qquad 2\chi + \left[\nu_3 \cos\frac{\varphi}{2} + \nu_0 \sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \tag{16}$$

или вид

$$\text{при} \quad t = t^* \qquad 2\chi + \nu_3 = 0, \qquad \nu_0 \cos\frac{\varphi}{2} + 2\chi \sin\frac{\varphi}{2} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (3), (9), (10), (11) (или (12), или (13)) десятого порядка и восемью краевыми условиями (6), (8), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (15) (или (16) или (17)) и равенством

$$H^o|_{t^*} = H^o(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u^o)|_{t^*} = 0, \tag{18}$$

имеющим место для оптимального управления $u^o$ и оптимальной траектории.

## 5. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые $\lambda_j$ и сопряженные $\mu_j$ переменные являются безразмерными. Безразмерные переменные $r^b$, $t^b$ и управление $u^b$ связаны с размерными переменными $r$, $t$ и управлением $u$ соотношениями: $r = Rr^b$, $u = u_{\max}u^b$, $t = Tt^b$, где $R$ — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); $V$, $T$ — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = c/R$, $T = R^2/c$.

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляется характерный безразмерный параметр $N = u_{\max}R^3/c^2$.

Отметим также, что при численном решении более удобно оставлять в качестве независимой переменной время $t$, не переходя к новой независимой переменной, — истинной аномалии $\varphi$. Дело в том, что в случае перехода к истинной аномалии усложняется условие, налагаемое на гамильтониан в конце движения, так как вместо задачи с подвижным правым концом необходимо будет решать задачу с «перемещающимся» многообразием на правом конце траектории [14].

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt^b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ \left(Nr^b u^b \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\right), \qquad \frac{d\varphi}{dt^b} = \frac{1}{\left(r^b\right)^2}, \qquad r^b = \frac{1}{1 + e\cos\varphi}. \tag{19}$$

Начальные условия интегрирования этой системы

$$t^b = 0, \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{\Lambda}^0 \circ \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right) \tag{20}$$

являются заданными.

Для правого конца траектории КА имеем условия

$$t^b = ?, \qquad \varphi = \varphi^* = ?, \qquad \operatorname{vect}\left[\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \mathbf{\Lambda}^* \circ \left(\cos\frac{\varphi^*}{2} + \boldsymbol{i}_3 \sin\frac{\varphi^*}{2}\right)\right] = 0, \tag{21}$$

где $\mathbf{\Lambda}^*$ — заданная кватернионная величина.

Ограничение по управлению в безразмерном виде $|u^b| \le 1$.

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt^b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu} \circ (Nr^b u^b \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3). \tag{22}$$

Отметим, что безразмерное уравнение для переменной $\chi$ было исключено из рассмотрения, так как значение переменной $\chi$ необходимо знать лишь в конечный момент времени для проверки условия (18), наложенного на гамильтониан. Это значение можно найти из условий трансверсальности.

Таким образом, в безразмерных переменных задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (19), (22) восьмого порядка и семью краевыми условиями (20), (21), которые необходимо дополнить первым из условий трансверсальности (15) и равенством гамильтониана нулю в конце движения. При этом законы оптимального управления аналогичны (11) (или (12), или (13)). (В дальнейшем верхние индексы у безразмерных переменных опускаются.)

## 6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Задачи оптимального управления решались для функционалов $J_1$ и $J_2$. Алгоритмы численного решения задач реализуют комбинацию метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска.

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [15] ($a_{or}$ — полуось орбиты):

$$a_{or} = 25500000\,\text{м}, \qquad u_{\max} = 0.101907\,\text{м/с}^2, \qquad N = 0.35;$$

для начального положения КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад):

$$\Lambda_0^0 = 0.679417, \qquad \Lambda_1^0 = -0.245862, \qquad \Lambda_2^0 = -0.539909, \qquad \Lambda_3^0 = -0.353860;$$
$$\lambda_0^0 = 0.061834, \qquad \lambda_1^0 = -0.451574, \qquad \lambda_2^0 = 0.457446, \qquad \lambda_3^0 = 0.763545;$$

для конечного положения КА: вариант 1 (малое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \qquad \Lambda_1^* = -0.268667, \qquad \Lambda_2^* = -0.577802, \qquad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

вариант 2 (большое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \qquad \Lambda_1^* = -0.522476, \qquad \Lambda_2^* = -0.125336, \qquad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 26000000$ м, $V = 2751.405874$ м/с, $T = 9449.714506$ с. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [16].

Ориентации начальной и конечной орбит КА характеризуются параметрами Эйлера $\Lambda_j^0$ и $\Lambda_j^*$, $j = \overline{0,3}$. Если в варианте 1 эти значения близки (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов: $\Delta\Omega_u = \Omega_u(t_0) - \Omega_u(t^*) = -3.30^\circ$, $\Delta I = I(t_0) - I(t^*) = -1.51^\circ$, $\Delta\omega_\pi = \omega_\pi(t_0) - \omega_\pi(t^*) = -1.59^\circ$), то в варианте 2 они существенно отличаются (отличие ориентаций орбит в угловой мере составляет десятки градусов: $\Delta\Omega_u = -32.00^\circ$, $\Delta I = -117.57^\circ$, $\Delta\omega_\pi = 39.96^\circ$).

На рис. 1–4 приведены законы изменения фазовых сопряженных переменных и управления для случая быстродействия ($e = 0$), случая минимизации характеристической скорости ($e = 0.25$) для варианта 2 и случая минимизации функционала $J_1$ ($e = 0.5$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 4.2$) для вариантов 1 и 2.

Отметим, что длительность процесса переориентации орбиты КА и значения минимизируемых функционалов совпадают с результатами, полученными в [4]. При этом отличаются начальные значения и законы изменения сопряженных переменных.

Отметим также, что длительность второго — пятого участков активного движения КА в случае быстродействия близки друг к другу.

В ходе численного решения задачи было установлено, что диапазоны изменения фазовых и сопряженных переменных, описывающих ориентацию орбиты КА, меньше диапазонов изменения переменных, описывающих ориентацию орбитальной системы координат. Наилучшую сходимость обеспечивают условия трансверсальности (17).

Полученные в статье результаты показывают полезность аналитического и численного исследования задачи оптимальной переориентации орбиты КА с двух точек зрения: в параметрах Эйлера $\Lambda_j$ и $\lambda_j$. В частности, вид уравнений линии переключения управления в случае использования переменных $\lambda_j$ намного проще и наглядней.

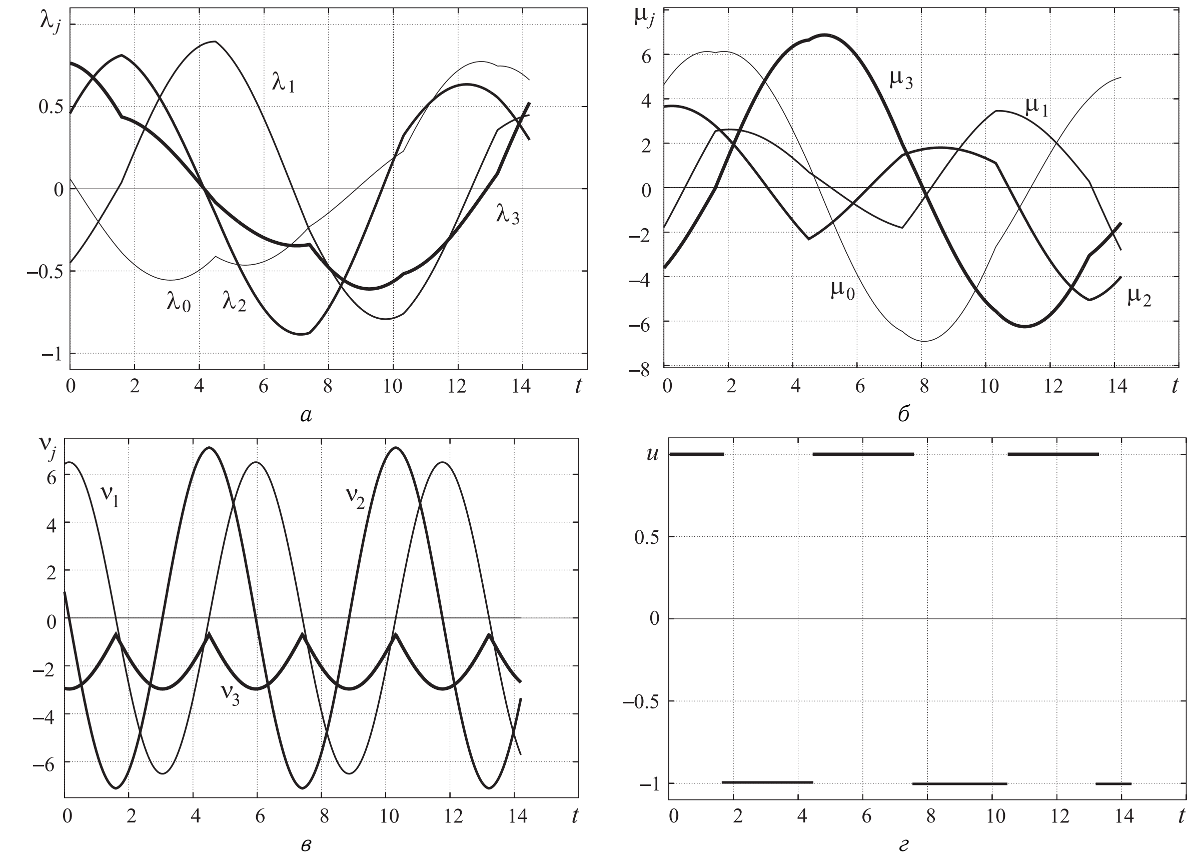


Рис. 1. Круговая орбита, вариант 2, быстродействие

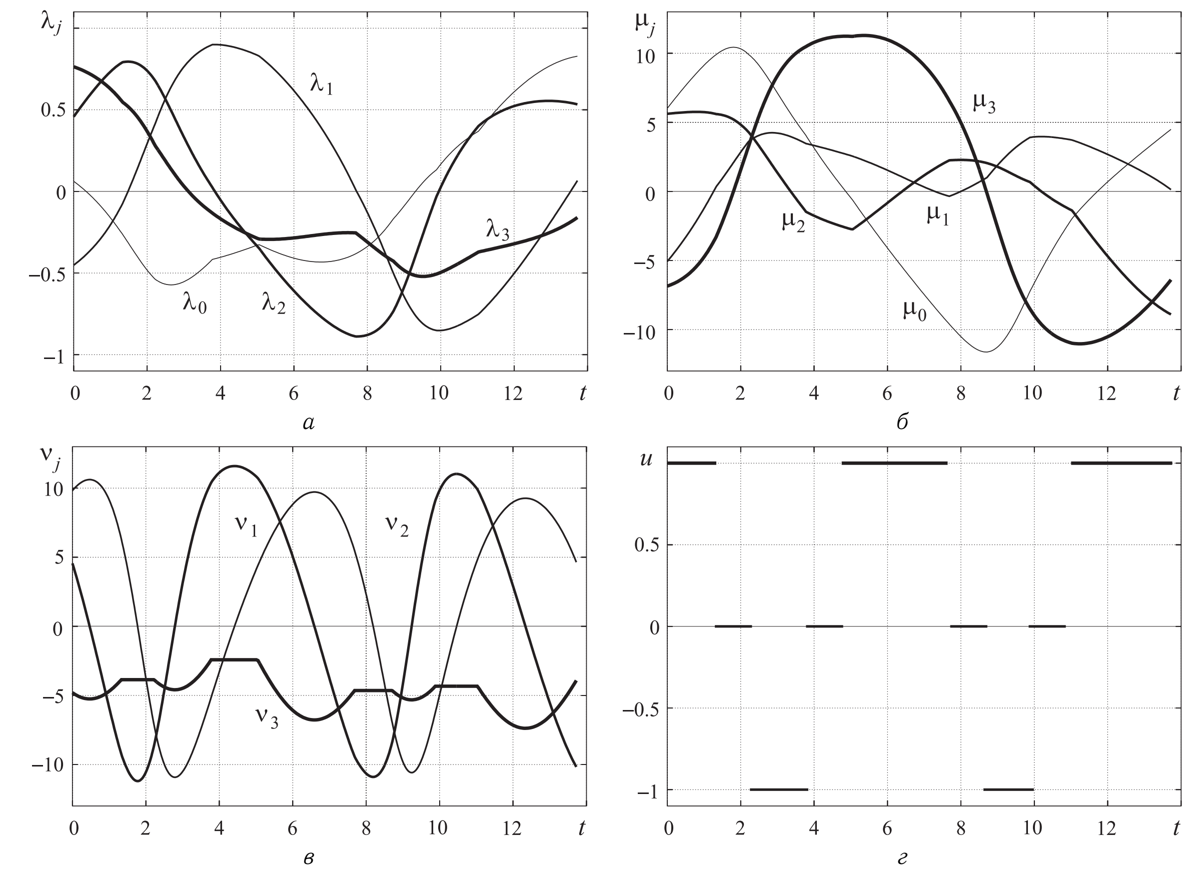


Рис. 2. Эллиптическая орбита ($e = 0.25$), вариант 2, $\int_0^{t^*} |u|\, dt \to \min$

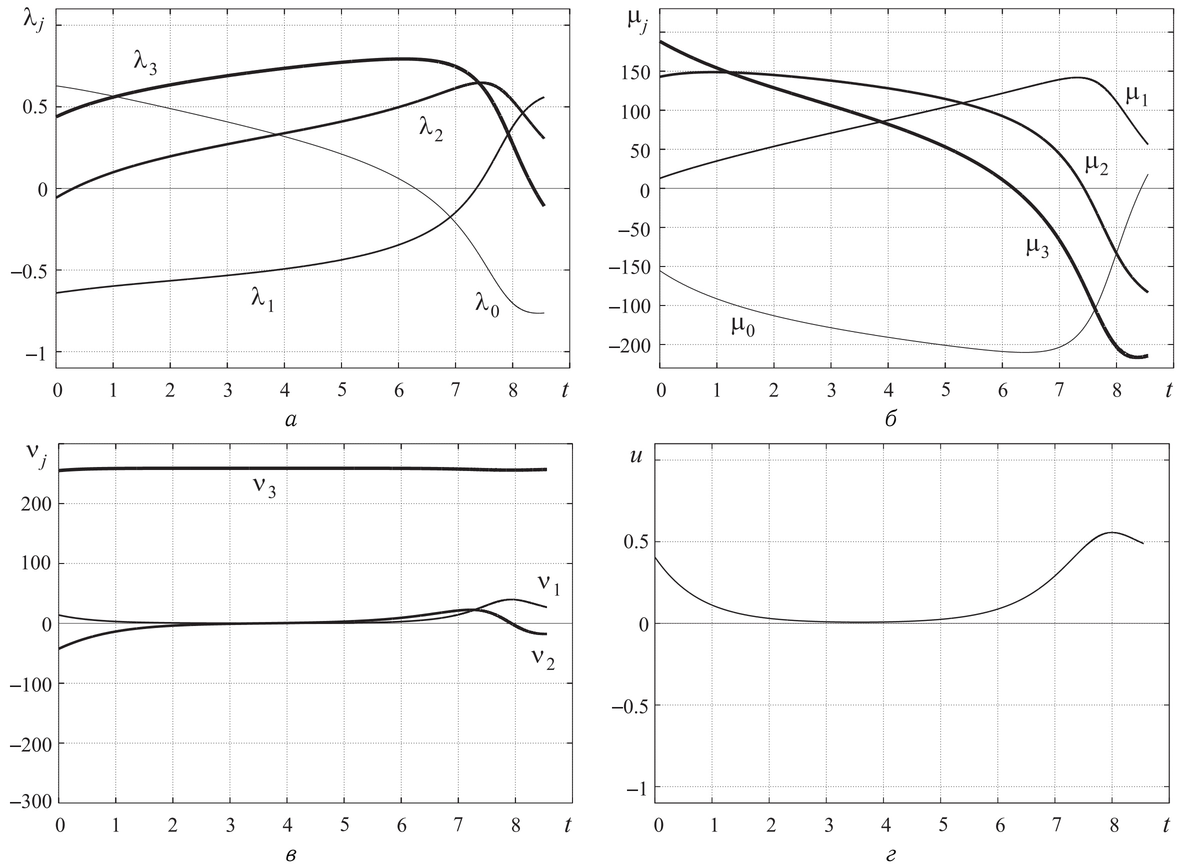


Рис. 3. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 1, $\int_0^{t^*}(1 + 4.2u^2)\,dt \to \min$

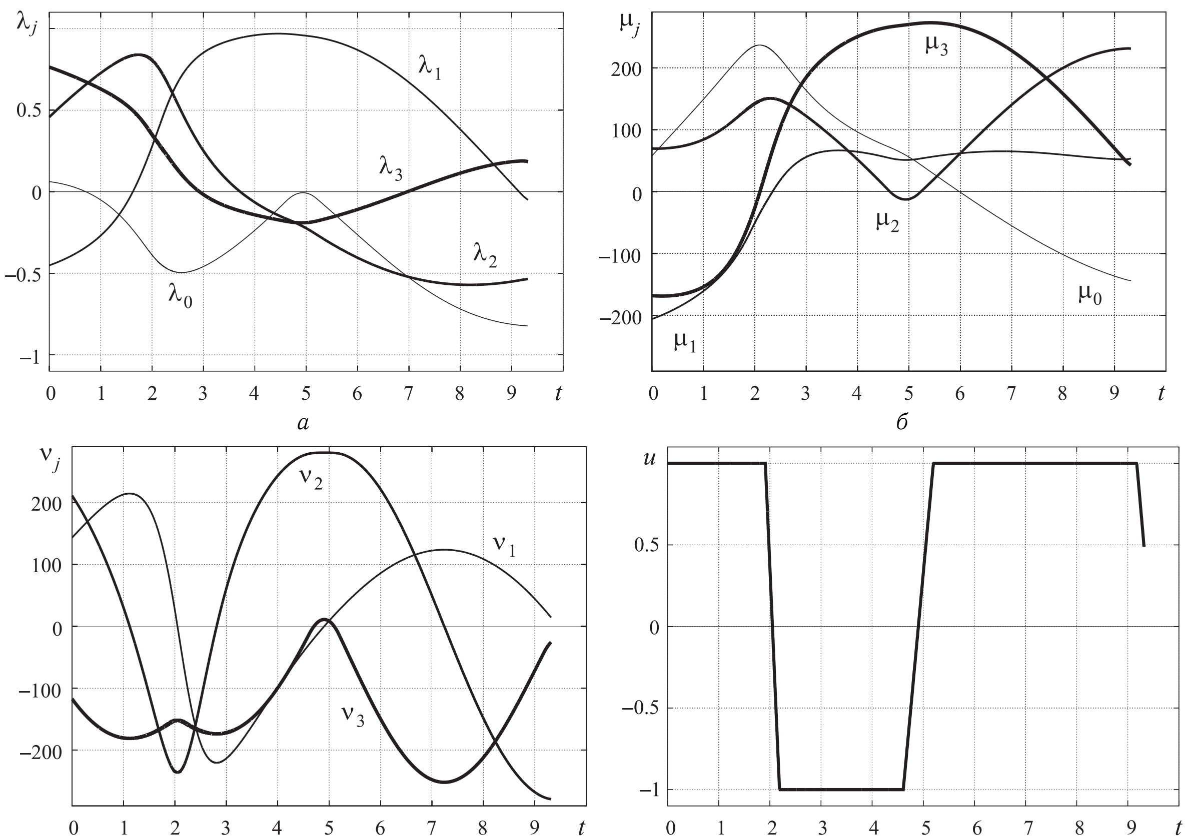


Рис. 4. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 2, $\int_0^{t^*}(1 + 4.2u^2)\,dt \to \min$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 12-01-00165).

**Библиографический список**

1. *Ненахов С. В., Челноков Ю. Н.* Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления : сб. тр. междунар. конф. М. : МАИ, 1997. С. 59–60. [*Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N.* Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Onboard integrated systems and modern problems of control : Sbornik. Moscow : MAI, 1997. P. 59–60.]

2. *Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н.* Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. тр. / ИПТМУ РАН. Саратов, 2002. С. 64–75. [*Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N.* Optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Problems of precise mechanics and control : Sbornik. Saratov, 2002. P. 64–75.]

3. *Афанасьева Ю. В., Челноков Ю. Н.* Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 153–155. [*Afanas'eva Yu. V., Chelnokov Yu. N.* Optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Mathematics. Mechanics : Sbornik. Saratov, 2005. Iss. 7. P. 153–155.]

4. *Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 87–95. [*Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.* About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2012. Vol. 12. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 3. P. 87–95.]

5. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космические исследования. 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3–15. [*Chelnokov Yu. N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. Vol. 31, № 3. P. 409–418.]

6. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 1. С. 92–107. [*Chelnokov Yu. N.* The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II // Cosmic Research. 2003. Vol. 41, № 1. P. 85–99.]

7. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М. : Физматлит, 2006. 512 с. [*Chelnokov Yu. N.* Quaternion and biquaternion models and methods of mechanics of solids and their applications. Moscow : Fizmatlit, 2006. 512 p.]

8. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып 6. С. 759–770. [*Chelnokov Yu. N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Research. 1992. Vol. 30, № 6. P. 612–621.]

9. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып 5. С. 502–517. [*Chelnokov Yu. N.* The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: I // Cosmic Research. 2001. Vol. 39, № 5. P. 470–484.]

10. *Панкратов И. А., Челноков Ю. Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 84–89. [*Pankratov I. A., Chelnokov Yu. N.* Analytical solution of differential equations of circular spacecraft's orbit orientation // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2011. Vol. 11. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 1. P. 84–89.]

11. *Челноков Ю. Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234. [*Chelnokov Yu. N.* Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit // Mathematics. Mechanics : Sbornik. Saratov, 2006. Iss. 8. P. 231–234.]

12. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с. [*Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A.* Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics. Moscow : Nauka, 1976. 864 p.]

13. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с. [*Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F.* The mathematical theory of optimal processes. Moscow : Nauka, 1983. 393 p.]

14. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с. [*Moiseev N. N.* Numerical methods in the theory of optimal systems. Moscow : Nauka, 1971. 424 p.]

15. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488–505. [*Chelnokov Yu. N.* The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: III // Cosmic Research. 2003. Vol. 41, № 5. P. 460–477.]

16. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с. [*Bordovitzyna T. V.* Modern numerical methods in problems of celestial mechanics. Moscow : Nauka, 1984. 136 p.]