УДК 517.518.238 + 517.518.85

ОБ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ю.В. Матвеева

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: KupriyanovaJulia@rambler.ru

При построении треугольных конечных элементов оценки погрешности интерполяции для производных функции в знаменателе содержат синус наименьшего угла треугольника. Способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени, предложенный Н.В. Байдаковой, при аппроксимации любых производных свободен от условия "синуса наименьшего угла". В работе рассмотрен двумерный кубический элемент в методе конечных элементов, подобный элементу Н.В. Байдаковой. Полученные оценки погрешности для производных функции по направлениям до третьего порядка включительно не зависят явно от геометрии треугольника. Установлена с точностью до абсолютных констант неулучшаемость полученных оценок погрешности аппроксимации производных по направлениям.

Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives

J.V. Matveeva

There is a sine of the minimum angle of the triangle in the denominator of estimation of inaccuracy of interpolation for derivative of function in building of triangular finite elements. The way of method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle suggested by N.V. Baidakova is free of minimum angle condition for approximation of any derivatives. There is two-dimenetional cubic element in finite element method equal to element of N.V. Baidakova in this paper. The considered estimations of inaccuracy for function derivatives in the directions up to derivative of order three in inclusive is free of triangle geometry. The unimprovable of calculated estimations of inaccuracy of approximations of derivatives in directions is proved in accuracy up to absolute constants.

В работе [1] Н.В. Байдаковой построен новый способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени. На невырожденном треугольнике рассматривается функция $f(x, y)$, непрерывная вместе с частными производными до четвертого порядка включительно. Треугольник с диаметром d расположен так, чтобы его наибольшая сторона располагалась на оси Ox. Равномерные нормы любых четвертых частных производных функции $f(x, y)$ на треугольнике не превосходят M. Строится интерполяционный полином $P_3(x, y) = P_3(z) = P_3(f; z)$ со следующими условиями: значения этого полинома и его первые частные производные в вершинах треугольника совпадают со значениями функции $f(x, y)$ и производных функции в тех же точках соответственно, а также смешанные производные полинома и функции второго порядка в вершине треугольника по направлениям наибольшей и наименьшей сторон, исходящим из этой вершины, совпадают. В [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует константа K такая, что для любой функции f, непрерывной на треугольнике вместе со всеми своими частными производными до четвертого порядка включительно, справедлива оценка*

$$\left|\left|\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-j}\partial y^j} - \frac{\partial^n P_3(x,y)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|\right|_C \le KMd^{4-n}\frac{1}{\sin^j \beta},$$

где $0 \le n \le 3; 0 \le j \le n$; β — средний угол треугольника.

Как мы видим, оценки погрешности любых производных функции до третьего порядка включительно в знаменателях отсутствует синус наименьшего угла, что позволяет ослабить требования к триангуляции. Попытки ослабления этого условия предпринимались давно. А. Женишек [2] в 1995 году рассмотрел вопрос приближения функций на треугольнике кубическими полиномами и получил оценку приближения частных производных первого порядка через синус среднего по величине угла. В 2005 году в работе Ю.Н. Субботина [3] построен новый кубический элемент, для которого оценки погрешности аппроксимации производных функции до третьего порядка включительно свободны от известного условия «синуса наименьшего угла» триангуляции. В работе [4] получены оценки приближения производных первого порядка по направлениям сторон треугольника, а в [5] — оценки приближения производных по направлениям до третьего порядка включительно, причем, как оказалось, эти оценки (в [4], [5]) не зависят явно от геометрии треугольника.

В данной работе рассмотрим задачу аппроксимации, аналогичную [1], и получим оценки отклонения производных функции и кубического интерполяционного полинома по направлениям сторон треугольника до третьего порядка включительно.

Пусть $\overline{T} = (A_1A_2A_3)$ — замкнутый невырожденный треугольник на плоскости с внутренностью T. Функция $f(\mathbf{x})$ определена на треугольнике $\overline{T}$. Пусть далее $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$ — единичные векторы.

Будем строить полином $Q(\mathbf{x})$ с действительными коэффициентами степени 3, который в вершинах $A_i, i = \overline{1,3}$, треугольника интерполирует функцию $f(\mathbf{x})$ вместе с ее производными по направлениям сторон треугольника T, т.е.

$$f(A_i) = Q(A_i), \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, i, j = \overline{1,3}, i \neq j. \tag{1}$$

Такой полином имеет 10 коэффициентов. Условия (1) определяют 9 из них. Остается выбрать один, в зависимости от которого можно будет говорить о степени приближения функции $f(\mathbf{x})$ полиномом $Q(\mathbf{x})$.

Теперь выберем недостающий в определении полинома $Q(\mathbf{x})$ коэффициент способом, близким к [1]. Определим его из равенства смешанных производных в произвольной вершине треугольника по направлениям двух ребер, исходящих из этой вершины.

Для определенности положим

$$\frac{\partial^2 Q(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{13}} = \frac{\partial^2 f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}\mathbf{e}_{13}}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на треугольнике $\overline{T}$ и имеет на нем непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, d — диаметр $\overline{T}$,*

$$M_4 = \max_{0 \le i_j \le 4, \sum i_j = 4} \max_{x \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|.$$

Тогда существует единственный интерполяционный полином $Q(\mathbf{x})$, удовлетворяющий условиям (1), (2), и справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^k \partial \mathbf{e}_{13}^{n-k}} \right| \le CM_4 d^{4-n}, 1 \le n \le 3, 0 \le k \le n, \tag{3}$$

где C — абсолютная постоянная. Можно считать, что $C = 2$.

Доказательство. Доказательство будем проводить в барицентрических координатах и считать, что $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — барицентрические координаты точки $\mathbf{x}$. Тогда полином $Q(\mathbf{x})$, интерполирующий функцию $f(\mathbf{x})$ на $\overline{T}$ с условиями (1), имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} f(A_i) x_i^3 + 3 \sum_{i \neq j, i, j \ge 0} f(A_i) x_i^2 x_j +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le 3} |A_iA_j| \cdot \left(\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}} x_j \right) x_i x_j + 6a_{111} x_1 x_2 x_3.$$

Из условия (2) найдем коэффициент a_{111}:

$$6a_{111} = 6f(A_1) + 2 \cdot |A_1A_2| \cdot \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} + 2 \cdot |A_1A_3| \cdot \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} + |A_1A_2| \cdot |A_1A_3| \cdot \frac{\partial^2 f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}. \tag{4}$$

Если в выражении многочлена $Q(\mathbf{x})$ положить $x_j = 0, j = \overline{1,3}$, то получим многочлен Эрмита на стороне $A_iA_k, (i, k = \overline{1,3}, i \neq j, k \neq j)$.

Для краткости будем обозначать $f_i = f(A_i)$, $i = \overline{1,3}$; $\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{e}_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{kj}}$, $k \neq j$; $k, j = \overline{1,3}$.

Так как $x_i, i = \overline{1,3}$ — барицентрические координаты, то производные по направлениям можно вычислить по следующему правилу:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_iA_j|} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1,3}, \quad i \neq j. \tag{5}$$

Используя (5), имеем

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{1}{|A_1A_2|} \cdot (6f_2x_2(x_1 + x_3) + 6a_{111}x_3(x_1 - x_2) - 6f_1x_1(x_2 + x_3)) +$$

$$+\frac{|A_2A_3|}{|A_1A_2|}\cdot\left[\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}}\cdot 2x_2x_3+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}}\cdot x_3^2\right]+\frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|}\cdot\left[-\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}\cdot 2x_1x_3-\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}}\cdot x_3^2\right]+$$
$$+\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot x_1(x_1-2x_2)+\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}}\cdot x_2(2x_1-x_2)\right].$$

$$\frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^2}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{12}}\left(\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right)=\frac{1}{|A_1A_2|^2}\cdot(6f_2(x_1+x_3-x_2)-12a_{111}x_3+6f_1(x_2+x_3-x_1))+$$
$$+\frac{2x_3}{|A_1A_2|^2}\cdot\left[|A_2A_3|\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}}+|A_1A_3|\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}\right]+\frac{1}{|A_1A_2|}\cdot\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot(2x_2-4x_1)+\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}}\cdot(2x_1-4x_2)\right],$$

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{12}}\left(\frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^2}\right)=\frac{6}{|A_1A_2|^3}\cdot\left(2(f_1-f_2)+|A_1A_2|\cdot\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}+\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right]\right),\tag{6}$$

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}}=\frac{1}{|A_1A_3|}\cdot(6f_3x_3(x_1+x_2)+6a_{111}x_2(x_1-x_3)-6f_1x_1(x_2+x_3)+$$
$$+\frac{|A_2A_3|}{|A_1A_3|}\cdot\left[\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}}\cdot x_2^2+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}}\cdot 2x_2x_3\right]+\frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|}\cdot\left[-\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot 2x_1x_2-\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}}\cdot x_2^2\right]+$$
$$+\frac{1}{|A_1A_3|}\cdot\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}\cdot x_1(x_1-2x_3)+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}}\cdot x_3(2x_1-x_3)\right],$$

$$\frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}^2}=\frac{1}{|A_1A_3|^2}\cdot(6f_3(x_1+x_2-x_3)-12a_{111}x_2+6f_1(x_2+x_3-x_1))+$$
$$+\frac{2x_2}{|A_1A_3|^2}\cdot\left[|A_1A_2|\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}+|A_2A_3|\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}}\right]+\frac{1}{|A_1A_3|}\cdot\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}\cdot(2x_3-4x_1)+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}}\cdot(2x_1-4x_3)\right],$$

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}^3}=\frac{6}{|A_1A_3|^3}\cdot\left(2(f_1-f_3)+|A_1A_3|\cdot\left[\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}+\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}}\right]\right).$$

Оценим отклонение производных по направлениям e_{12}, e_{13}. Оценим сначала отклонение производной третьего порядка по направлению e_{12}. Рассмотрим выражение (6). Представим f_2 и $\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}}$ по формуле Тейлора в окрестности точки A_1 с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки A_1 (в дальнейшем не будем указывать вид остатка, подразумевая форму Лагранжа), т.е.

$$f_2=f_1+\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot|A_1A_2|+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^2}\cdot|A_1A_2|^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}\cdot|A_1A_2|^3+\frac{1}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}\cdot|A_2\xi|^4,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^2}\cdot|A_1A_2|+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}\cdot|A_1A_2|^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}\cdot|A_1\eta|^3.$$

где ξ, η — точки, лежащие на стороне A_1A_2 треугольника. Тогда

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}(\mathbf{x})\right|=\left|\frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}-\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}\right|+\frac{1}{|A_1A_2|^3}\cdot\left||A_1A_2||A_2\eta|^3\cdot\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}-\frac{|A_2\xi|^4}{2}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}\right|\le$$
$$\le\left|\frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}-\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}\right|+\frac{1}{|A_1A_2|^3}\cdot\left||A_1A_2||A_2\eta|^3\cdot\frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}-\frac{|A_2\xi|^4}{2}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4}\right|\le CM_4d.$$

Аналогично получается оценка для производной третьего порядка по направлению e_{13}, если f_3 и $\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}}$ представить по формуле Тейлора в окрестности точки A_1.

Теперь рассмотрим смешанные производные по направлениям e_{12}, e_{13} третьего порядка.

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}^2}=\frac{2}{|A_1A_2|\cdot|A_1A_3|^2}\left(6(f_1-a_{111})+|A_1A_2|\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}+|A_2A_3|\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}}+|A_1A_3|\left(2\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}}-\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}}\right)\right).$$

Подставляя значение a_{111} из (4) и представляя $\frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{12}}$ по формуле Тейлора:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{12}}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}}\cdot|A_1A_3|+\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}^2}\cdot|A_1A_3|^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial \mathbf{e}_{12}\partial \mathbf{e}_{13}^3}\cdot|A_3\theta|^3,$$

где θ — точка, лежащая на стороне A_1A_3 треугольника, получаем, что

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^2}(\mathbf{x})\right| = \left|\frac{\partial^3 f_1}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^2} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{|A_3\theta|}{|A_1A_3|^2}\cdot\frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^3}\right| \le CM_4d.$$

Аналогично имеем оценку $\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{13}\partial\mathbf{e}_{12}^2}\right| \le CM_4d$. Итак, неравенства (3) при $n=3$ доказаны.

Пусть теперь $n=2$. Оценим смешанную производную по направлениям $\mathbf{e}_{12},\mathbf{e}_{13}$. Для этого рассмотрим криволинейный интеграл:

$$\int\limits_c^x \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^2}d\mathbf{e_{13}} = \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(x) - \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(c), \tag{7}$$

где c — точка, являющаяся проекцией точки $\mathbf{x}$ на сторону A_1A_3 треугольника. Таким образом, нам осталось получить оценку для второго слагаемого в (7). Так как значения производных $\frac{\partial(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}}$ по направлению $\mathbf{e}_{12}$ в точках A_1, A_3 равны нулю, то найдется точка B, лежащая в той половине $[A_1A_3]$, что и точка c, в которой $\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}} = 0$. Тогда, используя этот факт и применяя теорему Лагранжа, имеем

$$\left|\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(c)\right| = \left|\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(c) - \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(B)\right| = \left|\frac{\partial^3(Q-f)(\eta)}{\partial\mathbf{e}_{12}^2\partial\mathbf{e}_{13}}\right|\cdot|c\eta| \le \left|\frac{\partial^3(Q-f)(\eta)}{\partial\mathbf{e}_{12}^2\partial\mathbf{e}_{13}}\right|\cdot\frac{|A_1A_3|}{2}.$$

Используя полученные оценки для производных третьего порядка, получаем с учетом (7)

$$\left|\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}}(\mathbf{x})\right| \le CM_4d^2.$$

Пользуясь теми же средствами, получим оценки отклонения производных второго и первого порядков по направлениям $\mathbf{e}_{12}$ и $\mathbf{e}_{13}$. Таким образом, доказаны неравенства (3) при $n=1,2$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 можно получить оценки теоремы 1. Для этого расположим треугольник так, чтобы наибольшая его сторона, например, сторона A_1A_2, лежала на оси Ox. Строим интерполяционный полином третьей степени с условиями (1) и $\frac{\partial Q(P_{13})}{\partial\mathbf{e}_{12}} = \frac{\partial f(P_{13})}{\partial\mathbf{e}_{12}}$. Пусть A_1A_3 — наименьшая сторона. Тогда производная по направлению $\mathbf{e}_{12}$ совпадает с производной по x, т.е.

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial x^3}\right| = \left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^3}\right| \le CM_4d.$$

Чтобы получить производные по y, разложим единичный вектор e, коллинеарный Oy, по единичным векторам $\mathbf{e}_{12}$ и $\mathbf{e}_{13}$:

$$\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}_{12} + \alpha_2\mathbf{e}_{13}.$$

Обозначим через β и γ средний и наибольший углы в треугольнике соответственно. Тогда несложно найти коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}$:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sin\beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Имеет место неравенство $C_1\sin\gamma \le \sin\beta \le C_2\sin\gamma$. Тогда можно получить оценку для производной по y

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial y^3}\right| = \left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}^3}\right| =$$

$$= \left|\alpha_1^3\cdot\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^3} + 3\alpha_1^2\alpha_2\cdot\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}^2\partial\mathbf{e}_{13}} + 3\alpha_1\alpha_2^2\cdot\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{12}\partial\mathbf{e}_{13}^2} + \alpha_2^3\cdot\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial\mathbf{e}_{13}^3}\right|.$$

Воспользуемся результатами теоремы 2:

$$\left|\frac{\partial^3(Q-f)}{\partial y^3}\right| \le CM_4d\cdot\left(\frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Аналогично получаются оценки для остальных частных производных. Эти утверждения останутся справедливыми,если считать, что интерполяционное условие (2) задается в вершине любого по величине угла в треугольнике. Сравнивая результаты с утверждением теоремы 1, видно, что теорема 1 является следствием теоремы 2.

Замечание. Неравенства (3)являются точными по порядку в следующем смысле. Пусть $0 < x_0 < 1$, T — треугольник с вершинами $A_1(0,b), A_2(x_0,0)$, $A_3(0,a)$; b<0, $d = a + |b|$, $0 < a \le |b|$, Q — сплайн третьей степени для функции $f(x,y) = |y|^4$, удовлетворяющий интерполяционным условиям (1) и $\frac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ik}} = \frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ik}}(i,j,k = \overline{1,3}, i \ne j \ne k)$. Тогда для производных по направлениям сторон треугольника справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{1}{96}M_4 d^{4-n} \le \sup_{x\in\overline{T}} \left|\frac{\partial^n(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{ij}^k \partial \mathbf{e}_{ik}^{n-k}}\right| \le 2M_4 d^{4-n}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность С.Ф Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

Библиографический список

1. *Байдакова Н.В.* Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
2. *Zenisek A.* Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. 1995. V. 64, № 211. P. 929–941.
3. *Субботин Ю.Н.* Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Вып. 11, № 2. С. 120–130.
4. *Куприянова Ю.В.* Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 59–61.
5. *Куприянова Ю.В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике// Совр. методы теории функций и смеж. проблемы: Материалы конф. Воронеж, 2007. С.120–121.

УДК 519.872

АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

Ю.И. Митрофанов, Н.П. Фокина

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru

Предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и централизованным динамическим управлением маршрутизацией, основанным на использовании в процессе функционирования сети в течение фиксированных интервалов времени различных маршрутных матриц. Метод анализа основан на описании процесса функционирования сети обслуживания модельными цепями Маркова. Приводится пример анализа сети рассматриваемого типа.

An Analysis of Queueing Networks with Dynamic Routing Control

Y.I. Mitrophanov, N.P. Fokina

A method for analysis of closed exponential queueing networks with one class of customers and central dynamic routing control is proposed. The method of control is based on a use of different routing matrices during fixed time intervals in the network operation process. The method for analysis is based on a description of the network operation process with model Markov chains. An example of analysis of this type network is given.

ВВЕДЕНИЕ

Применение методов динамического управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания (СеМО) позволяет значительно повысить качество их функционирования. Используемые в сетях методы управления маршрутизацией в существенной степени определяют содержание методов анализа сетей обслуживания этого типа. Достаточно полное представление о методах анализа можно получить из обзора [1]. Примерами работ, в которых рассматриваются задачи анализа сетей массового обслуживания с зависящей от состояния сетей маршрутизацией, являются [2–9]. В работе [2] исследуется замкнутая сеть с одним классом требований и интенсивностями переходов требований, зависящими от состояния сети. Определяются условия, которым должны удовлетворять интенсивности переходов, чтобы существовало стационарное распределение вероятностей состояний сети в мультипликативной