УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРОСТЕЙШЕМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

М.Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru

На простейшем геометрическом графе из двух ребер, содержащем цикл, описан класс интегральных операторов с областью значений, удовлетворяющей условию непрерывности в узле графа. Установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, геометрический граф, инволюция, разложение по собственным и присоединенным функциям, равносходимость.

The Theorem on Equiconvergence for the Integral Operator on Simplest Graph with Cycle

M.Sh. Burlutskaya

The paper deals with integral operators on the simplest geometric two-edge graph containing the cycle. The class of integral operators with range of values satisfying continuity condition into internal node of graph is described. The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions and trigonometric Fourier series is established.

Key words: integral operator, geometric graph, involution, the expansions in eigen and associated functions, equiconvergence.

Рассматривается геометрический граф Γ, состоящий из двух ребер, одно из которых образует петлю-цикл. Ранее изучались дифференциальные операторы первого порядка на таком графе. В частности, исследовались вопросы о равносходимости разложений по собственным функциям и в тригонометрический ряд Фурье. Оказалось, что если на ребре, не входящем в цикл, задан оператор чистого дифференцирования y', то равносходимость не имеет места. Если же на этом ребре вместо y' взять функционально-дифференциальный оператор с инволюцией вида $l[y] = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x)$, то равносходимость установлена [1].

Исследование подобных вопросов для интегральных операторов представляет собой активно развивающееся направление (напр., [2–4]). В данной работе описывается класс интегральных операторов на Γ, область значений которых удовлетворяет условию непрерывности в узле графа и обращение которых приводит к операторам, обобщающим уже изученные ранее. Устанавливается равносходимость разложений по собственным функциям заданного оператора и в тригонометрический ряд Фурье.

1. Опишем структуру интегрального оператора на графе Γ. Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, зададим интегральный оператор как оператор в пространстве вектор-функций

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования). От $y(x)$ требуем непрерывности на всем Γ, в том числе и узле, т.е требуем $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$, что накладывает определенные условия на ядро оператора. Определение структуры интегрального оператора опирается на следующую теорему.

Теорема 1 (А.П. Хромов[5]). *Если $A_1 f = \int_0^1 A_1(x,t)f(t)\,dt$ — произвольный оператор с кусочно-непрерывным ядром, $g(x) \in C[0,1]$, и $g(0) \neq g(1)$, то область значения оператора*

$$Af(x) = \int_0^1 A_1(x,t)f(t)\,dt + g(x)\int_0^1 \nu(t)f(t)\,dt,$$

где $\nu(t) = \dfrac{A_1(1,t) - A_1(0,t)}{g(0) - g(1)}$, удовлетворяет соотношению $y(0) = y(1)$.

Пусть $\widetilde{A}_1(x,t)$, $\widetilde{A}_2(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по первой и непрерывны по второй компоненте соответственно при $t \neq x$ и $t \neq 1-x$, причем $\widetilde{A}_k(x,x) \equiv 1$ (дополнительные условия гладкости будут приведены позже).

На ребре-цикле зададим интегральный оператор следующим образом:

$$y_1(x) = A_1 f_1(x) = \int\limits_0^x \widetilde{A}_1(x,t) f_1(t)\,dt + g_1(x) \int\limits_0^1 \nu(t) f_1(t)\,dt,$$

где $g_1(x)$ и $\nu(t)$ определяются через $\widetilde{A}_1$, так же как в теореме 1. Согласно теореме 1, $y_1(0) = y_1(1)$.

На втором ребре графа положим $y_2(x) = \int\limits_0^{1-x} \widetilde{A}_2(1-x,t) f_2(t)\,dt + c_2 g_2(x)$ (ядро выбираем в таком виде для того, чтобы при обращении получить оператор, главная часть которого содержит $y_2'(1-x)$). Предполагаем, что $g_2(x) \in C[0,1]$. Константу c_2 найдем из условия $y_2(0) = y_1(0)$. Требуя $g_2(0) \neq 0$, получим $c_2 = \big(A_1 f_1\big|_{x=1} - \widetilde{A}_2 f_2\big|_{x=0}\big)/g_2(0)$, откуда

$$y_2(x) = A_2 f_2(x) + \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \int\limits_0^1 A_1(1,t) f_1(t)\,dt,$$

где $A_2 f_2(x) = \int\limits_0^{1-x} \widetilde{A}_2(1-x,t) f_2(t)\,dt - \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \int\limits_0^1 \widetilde{A}_2(1,t) f_2(t)\,dt$.

Таким образом, интегральный оператор на графе есть оператор (1) с ядром

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)} A_1(1,t) & A_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1(x,t) = \varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t) + g_1(x)\nu(t)$, $A_2(x,t) = \varepsilon(1-x,t)\widetilde{A}_2(1-x,t) - \frac{g_2(x)}{g_2(0)}\widetilde{A}_2(1,t)$; $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \leq t$. Область значений оператора (1) удовлетворяет соотношениям

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{3}$$

2. В дальнейшем нам понадобится знать структуру оператора A^{-1}. Займемся обращением оператора A. Предполагаем, что выполнены следующие условия: компоненты ядра $A(x,t)$, а также $\frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x,t)$ $(k = 1,2)$, $\frac{\partial}{\partial t} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны, кроме, может быть, линий $t = x$, $t = 1-x$.

Лемма 1. *Если $y = Af$, то*

$$Py'(x) = f(x) + Bf(x), \tag{4}$$

где $Py'(x) = P_1 y'(x) + P_2 y'(1-x)$, $P_1 = \operatorname{diag}(1,0)$, $P_2 = \operatorname{diag}(0,-1)$, $Bf(x) = \int\limits_0^1 B(x,t) f(t)\,dt$, $B(x,t) = P_1 A_x'(x,t) + P_2 A_x'(1-x,t) = PA_x'(x,t)$.

Доказательство. Дифференцируя (1), где $A(x,t)$ есть ядро (2), получим

$$y'(x) = P_1 f(x) + P_2 f(1-x) + \int\limits_0^1 A_x'(x,t) f(t)\,dt, \tag{5}$$

где $P_1 = \operatorname{diag}(1,0)$, $P_2 = \operatorname{diag}(0,-1)$. Меняя в (5) x на $1-x$, получим уравнение, которое вместе с (5) дает

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y'(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} + \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} A_x'(x,t) & 0 \\ A_x'(1-x,t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f(1-t) \end{pmatrix} dt. \tag{6}$$

Матрица $\widehat{P}$ из P_i в (6) обратима, и обратная ей совпадает с $\widehat{P}$. Преобразуя (6), придем к системе, первое уравнение в которой и есть (4). $\square$

Теперь представим оператор B в пространстве $L_2^2[0,1]$ в виде $B = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V — конечномерный оператор и $Vf(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (f, \psi_k)\varphi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_1^m$, $\{\varphi_k\}_1^m$ — линейно независимые системы в пространстве функций размерности 2, причем компоненты $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ достаточно гладкие функции, $(f, \psi_k) = \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_0^1 f_j(t)\psi_k^j(t)\,dt$, $\psi_k^j(t)$ — компоненты $\psi_k(t)$. Тогда из (4) получим

$$(E+W)^{-1}Py'(x) = f(x) + (E+W)^{-1}Vf(x). \tag{7}$$

В силу леммы 14 из работы [4] для существования A^{-1} необходимо и достаточно существование отличного от нуля минора Δ порядка m матрицы $M = \begin{pmatrix} E + (\widetilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int\limits_0^1 A(0,t)\widetilde{\varphi}^T(t)\,dt \end{pmatrix}$ (здесь E — единичная матрица $m \times m$, $(\widetilde{\varphi}, \psi) = (\widetilde{\varphi}_j, \psi_k)_1^m$, $\widetilde{\varphi}_k = (E+W)^{-1}\varphi_k$, $\widetilde{\varphi}^T = (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_m)$). Считаем для определенности, что Δ образован из первых m строк.

Теорема 2. *Пусть A^{-1} существует. Тогда*

$$A^{-1}y = (E+W)^{-1}Py'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m} \big((E+W)^{-1}Py', \psi_j\big)\Delta_{jk}\widetilde{\varphi}_k(x), \tag{8}$$

$$Sy(0) + Ty(1) = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Доказательство. Так же как в лемме 15 из работы [4], получаем для A^{-1} представление (8) с «естественными» краевыми условиями:

$$\int\limits_0^1 A(0,t)A^{-1}y(t)\,dt = y(0). \tag{10}$$

Условия (3) для $y = Af$ в матричной форме имеют вид (9). Покажем эквивалентность для оператора A^{-1} соотношений (9) и (10).

Согласно лемме 1 из работы [6], если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L, то существуют x_1 и x_2 такие, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2$, δ_{ij} — символ Кронекера). Аналогично может быть доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть f_1, f_2, f_3 — линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L. Существуют $x_1, x_2, x_3 \in L$ такие, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2,3)$.*

Доказательство. Как отмечено, для f_1 и f_2 существуют y_1 и y_2 такие, что $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2)$. Рассмотрим матрицу $G(y_3) = (f_i(y_j))_{j,i=1}^3$, где $y_3 = y$ — произвольно. Так как определитель $\det G(y) = -f_3(y_1)f_1(y) - f_3(y_2)f_2(y) + f_3(y)$ есть линейная комбинация $f_i(y)$, то в силу линейной независимости f_1, f_2, f_3, существует y_3 такой, что $G(y_3)$ неособая. Пусть $\Gamma = G^{-1}(y_3)$. Тогда, учитывая аддитивность функционалов, имеем $E = \Gamma G(y_3) = (f_i(x_j))_{j,i=1}^3$, где $x_i = \gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \gamma_{i3}y_3$. Отсюда следует утверждение леммы. □

Вернемся к доказательству теоремы 2. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ множества вектор-функций из $W_2^2[0,1]$, удовлетворяющих соотношениям (10) и (9) соответственно. Согласно построению, областью определения оператора A^{-1} является $\mathfrak{L}_1$. Так как область значений оператора A удовлетворяет (9), то $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$. Докажем обратное включение. Положим $(f_1(y), f_2(y))^T = Sy(0) + Ty(1)$. Функционалы f_1 и f_2 линейно независимы. Для любого $y \in \mathfrak{L}_2$ имеем $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = 0$. В (10) количество условий не превышает 2. Рассмотрим три случая.

1. Пусть в (10) имеем два линейно независимых краевых условия: $f_3(y) = 0$, $f_4(y) = 0$. Покажем, что f_1 и f_2 есть линейные комбинации f_3 и f_4. Действительно, если f_1, f_3 и f_4 линейно независимы, то по лемме 2 существует x_1 такой, что $f_1(x_1) = 1$, $f_3(x_1) = f_4(x_1) = 0$, откуда $x_1 \in \mathfrak{L}_1$. Но так как $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$, то $x_1 \in \mathfrak{L}_2$, и, следовательно, $f_1(x_1) = 0$. Получили противоречие. Таким образом,

f_1 есть линейная комбинация f_3 и f_4. Аналогичное утверждение доказывается для f_2. Итак, имеем преобразование $f_1 = \alpha_{11} f_3 + \alpha_{12} f_4$, $f_2 = \alpha_{21} f_3 + \alpha_{22} f_4$, с неособой (в силу линейной независимости f_1 и f_2) матрицей. Отсюда $\mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1$, что означает эквивалентность условий (9) и (10).

2. Пусть (10) дает одно условие: $f_3(y) = 0$. Тогда если f_k (где k одно из чисел 1, 2) и f_3 линейно независимы, то по лемме 1 из работы [6] существует x_1 такой, что $f_k(x_1) = 1$, $f_3(x_1) = 0$. Отсюда $x_1 \in \mathfrak{L}_1$ и, следовательно, $x_1 \in \mathfrak{L}_2$, и $f_k(x_1) = 0$. Снова получили противоречие. Таким образом, $f_k(y) = \alpha_k f_3(y)$, откуда следует линейная зависимость f_1 и f_2, что невозможно. Значит, случай 2) не может иметь место.

3. Если (10) не содержит ни одного условия, то $\mathfrak{L}_2$ оказывается собственным подпространством $\mathfrak{L}_1$, что снова противоречит условию. Значит и этот случай невозможен. □

Используя интегрирование по частям, так же как в работе [2, теорема 2] получим

Теорема 3. *Для оператора A^{-1} справедливо представление*

$$A^{-1}y(x) = Py'(x) + a_1(x)y(0) + a_2(x)y(1) + a_3(x)y(x) + a_4(x)y(1-x) + \int_0^1 a(x,t)y(t)\,dt, \tag{11}$$

$$Sy(0) + Ty(1) = 0, \tag{12}$$

где $a_i(x)$, $a_i'(x)$, $i = \overline{1,4}$, — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $A_x(x,t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, S и T — постоянные матрицы 2×2.

3. Получим краевую задачу для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ оператора A. Пусть $y = (E - \lambda A)^{-1} A f$. Тогда y удовлетворяет условиям (12) и интегро-дифференциальной системе:

$$A^{-1}y - \lambda y = f. \tag{13}$$

Используя представление (11) для A^{-1}, замену в (13) x на $1-x$ и полагая $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, $z(x) = (z_1(x)^T, z_2(x)^T)^T$, получим

$$Qz'(x) + \widetilde{P}_1(x)z(0) + \widetilde{P}_2(x)z(1) + \widetilde{P}_3(x)z(x) + \widetilde{N}z = \lambda z(x) + \widetilde{m}(x), \tag{14}$$

где $Q = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ P_2 & -P_1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2(1-x) & a_1(1-x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4(1-x) & a_3(1-x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{N}z = \int_0^1 \widetilde{N}(x,t)z(t)\,dt$, $\widetilde{N}(x,t) = \mathrm{diag}(a(x,t), a(1-x, 1-t))$, $\widetilde{m}(x) = (f(x)^T, f(1-x)^T)^T$.

Так как $y(0) = z_1(0) = z_2(1)$, $y(1) = z_1(1) = z_2(0)$, то краевые условия (12) примут вид $Sz_1(0) + Tz_2(0) = 0$, $Sz_2(1) + Tz_1(1) = 0$, или

$$\widetilde{M}_0 z(0) + \widetilde{M}_1 z(1) = 0, \quad \text{где } \widetilde{M}_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Если λ таково, что резольвента R_λ оператора A существует, и $y(x) = R_\lambda f(x)$, то вектор $z(x) = (y_1(x), y_2(x), y_1(1-x), y_2(1-x))^T$ является решением задачи* (14)–(15)*. И обратно, если $z(x)$ удовлетворяет* (14)–(15)*, и задача* (14)–(15) *невырождена, то R_λ существует, и $R_\lambda f(x) = z_1(x)$, где $z_1(x)$ — вектор из первых двух компонент $z(x)$.*

Далее проводится преобразование системы (14)–(15), аналогично тому, как это делалось, например, в работе [4]. Все собственные значения ω_j матрицы Q^{-1} различны и отличны от нуля (числа $1, -1, i, -i$). Поэтому существует неособая матрица Γ, такая что $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Положим $P_i(x) = \Gamma^{-1}Q^{-1}\widetilde{P}_i(x)\Gamma$, $H_0(x) = \mathrm{diag}\,(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$, где $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right\}$ и $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_3(x)$; $H_1(x)$ — матрица с нулями на главной диагонали, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H_0'(x) + P_3(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Так как элементы матрицы $P_3(x)$ из пространства $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$, причем $h_i(x) \neq 0$.

Лемма 3. *Существует матричная функция $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, такая, что преобразование $z(x) = \Gamma H(x,\lambda)v(x)$ приводит систему* (14)–(15) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v = \lambda Dv(x) + m(x,\lambda), \tag{16}$$

$$U(v) = M_{0\,\lambda}v(0) + M_{1\,\lambda}v(1) = 0, \tag{17}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(1,\lambda)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda) \times \times \left[H_1'(x) + P_3(x)H_1(x)\right]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\widetilde{N}\Gamma H(x,\lambda)$, $M_{0\,\lambda} = \widetilde{M}_0\Gamma H(0,\lambda)$, $M_{1\,\lambda} = \widetilde{M}_1\Gamma H(1,\lambda)$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$, $m(x) = D\Gamma^{-1}\widetilde{m}(x)\Gamma$.

4. Далее используются методы и результаты из работы [4]. Рассматриваются следующие краевые задачи:

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U(w) = M_{0\,\lambda}w(0) + M_{1\,\lambda}w(1) = 0,$$

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U_0(w) = w(0) - w(1) = 0,$$

где $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,1]$.

Исследуя решения $R_{1\lambda}m$ и $R_{2\lambda}m$ этих задач, сравнивая их асимптотическое поведение, а также сравнивая эти решения с решением задачи (16)–(17), придем к следующему результату (аналогично [4, лемма 25]).

Лемма 4. *Если компоненты $f(x)$ из $L[0,1]$, $v(x,\lambda)$ — решение задачи* (16)–(17)*, $m(x)$ — та же функция, что и в лемме* 3*, то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}H_0^{-1}(x)m(x)\right] d\lambda \right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0,1/2),$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ — норма в $C[\varepsilon,1-\varepsilon]$.

Теорема 5 (равносходимости). *Пусть A^{-1} существует, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 2. Тогда для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim \left\|S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T\right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

Доказательство. Имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f\,d\lambda, \qquad \sigma_r(f_j,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f_j\,d\lambda,$$

где $R_\lambda(A)$ — резольвента оператора A, $y = R_{0\lambda}f_j$ — решение скалярной краевой задачи $y' = \lambda y + f_j$, $y(0) = y(1)$.

Согласно теореме 4 и лемме 3, $R_\lambda(A)f = z_1(x) = [\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)]_1$ (где $[\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)]_1$ означает вектор из первых двух компонент $\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)$). Учитывая лемму 4, имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} [\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}H_0^{-1}(x)m(x)]_1\,d\lambda + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Полагая $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $\Gamma^{-1} = (\delta_{ij})$, и учитывая, что $(R_{2\lambda}m)_k = R_{0,\lambda\omega_k}m_k$, для первой компоненты $S_r(f,x)$ получим:

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} h_k \sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) + o(1),$$

где $\varphi_k = \delta_{k1}f_1(x) + \delta_{k2}f_2(x) + \delta_{k3}f_1(1-x) + \delta_{k4}f_2(1-x)$. По теореме Штейнгауза [7, гл.1, §4] и принципу локализации $\sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) = h_k^{-1}(x)\sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1)$. Отсюда

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} \sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1), \tag{18}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Так как $|\omega_k| = 1$, и γ_{ij}, δ_{ij} — элементы взаимнообратных матриц, то (18) переходит в

$$(S_r(f,x))_1 = \sigma_r(f_1, x) + o(1).$$

Аналогично можно показать, что $(S_r(f,x))_2 = \sigma_r(f_2, x) + o(1)$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-00003, 07-01-00397) *и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ* (*проект НШ*-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, №12. С. 1597–1605.

2. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

3. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

4. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

5. *Хромов А.П.* Интегральный оператор с периодическими краевыми условиями// Совр. методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весен. мат. школы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. С. 225–226.

6. *Хромов А.П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сб. статей. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.

7. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

УДК 513.6

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЛЕРАНТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

И.А. Кляева

Филиал ФГОУ ВПО «ПАГС им. П.А.Столыпина» в г.Балаково,
кафедра прикладной информатики и естественно-научных дисциплин
E-mail: lana331@rambler.ru

В статье изложена теоретическая база для построения спектральной последовательности толерантных расслоений. А именно, приведен ряд важных свойств сингулярных кубов в толерантных расслоениях, доказана теорема о действии фундаментальной группы базы на группе гомологий слоя толерантного расслоения. Согласно общей теории спектральных последовательностей получены первый и второй члены спектральной последовательности толерантных расслоений.

Ключевые слова: толерантное пространство; толерантное расслоение; группы гомологий; спектральная последовательность.

Spectral Sequences of Fibre Tolerance Spaces

I.A. Klyaeva

The paper presents the theoretical base for the construction of spectral sequences of tolerant exfoliations. Namely, the authors give a number of important qualities of singular cubes in tolerant exfoliations. The fundamental base group operation on the group of fiber homology of tolerant exfoliation theorem is proved. According to the general theory of spectral sequences the first and the second terms of spectral sequence of tolerant exfoliations are got.

Key words: tolerant space; tolerant exfoliation; group of homology; spectral sequence.