УДК 514.76

СВЯЗНОСТИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 220013, Беларусь, Минск, П. Бровки, 6, mozheynatalya@mail.ru

В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность. Целью данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны, а также самих связностей, их тензоров кривизны и кручения. В работе определены основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, редуктивное пространство. Приведено в явном виде локальное описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих связностей нулевой кривизны. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны также в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, их тензоры кривизны и кручения.

Ключевые слова: инвариантная связность, тензор кривизны, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра Ли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393

ВВЕДЕНИЕ

Многообразия, снабженные дифференциально-геометрическими структурами, являлись объектом многих исследований, специализация многообразия приводит к важнейшим понятиям геометрии: группе Ли, главному расслоению, однородным пространствам, пространствам со связностями и пр. Двумерные однородные пространства были локально классифицированы еще Софусом Ли (Lie) [1], однако многие исследователи (например, В. В. Горбацевич и А. Л. Онищик [2]) считали невозможной классификацию однородных пространств размерности три и выше. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Если на поверхности зафиксирован способ «параллельно» переносить касательные вектора вдоль кривых, то говорят, что на этой поверхности задана связность. Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках «кривого» пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [3]. С описанием трехмерных редуктивных пространств и связностей на них можно ознакомиться в [4], целью же данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, а также самих связностей, их тензоров кривизны и кручения. Рассматриваемая тема имеет также многочисленные приложения, например, А. З. Петров [5] дал алгебраическую классификацию полей тяготения, связанную со структурой тензора кривизны пространства.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $(\overline{G}, M)$ — трехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ — группа Ли на многообразии M. Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \overline{G}_o$ стабилизатор точки o. Известно, что проблема классификации однородных пространств $(\overline{G}, M)$ эквивалентна классификации пар групп Ли $(\overline{G}, G)$ таких, что $G \subset \overline{G}$ (см., например, [6]). Для изучения однородных пространств важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ на $\mathrm{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия $\overline{G}$ на M. Поставим в соответствие $(\overline{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G. Два однородных пространства локально изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие пары алгебр Ли эквивалентны. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *эффективной*, если $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, однородное пространство $(\overline{G}, M)$ является локально эффективным тогда и только тогда, когда соответствующая пара алгебр Ли эффективна. *Изотропный* $\mathfrak{g}$*-модуль* $\mathfrak{m}$ — это $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция. Для классификации трехмерных изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ сначала классифицированы (с точностью до изоморфизма) точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U, что эквивалентно классификации подалгебр $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, для каждого полученного $\mathfrak{g}$-модуля U классифицированы (с точностью до эквивалентности) все такие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U изоморфны. Соответствующая классификация приведена в [4].

Между инвариантными аффинными связностями на $(\overline{G}, M)$ и линейными отображениями $\Lambda\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [7]). Будем называть такие отображения *(инвариантными) аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [8]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем, эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in Inv\,T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in Inv\,T_3{}^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$.

Того, что пара является изотропно-точной, не достаточно для существования инвариантных связностей (см., например, [9]). Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\bar{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Класс редуктивных однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский [10], у них при параллельном переносе сохраняются тензоры кривизны и кручения. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [8]. Найдем нередуктивные пространства $\overline{G}/G$, допускающие инвариантные аффинные связности, кривизна которых не может быть нулевой. Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующий приведенному в [4]. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, такая пара будет обозначаться $d.n.1$, она всегда является редуктивной.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СВЯЗНОСТЕЙ НА НИХ

Найдем нередуктивные пары, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Информация о самих парах, связностях на них, тензорах кривизны и кручения содержится в доказательстве теоремы.

Теорема 1. *Если нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ допускает инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна одной из следующих подалгебр:*

$$4.21.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u \\ & x & z \\ & & \\ \hline\end{array}\ ; \qquad 3.25.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & z \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array}\ ; \qquad 3.20.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \\ \hline\end{array}\ , \qquad \begin{array}{c}(\lambda, \mu) = (0, 1/2); \\ (\lambda, \mu) = (1/5, 2/5);\end{array}$$

$$2.13.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array}\ ; \qquad 2.20.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}\ ; \qquad 1.5.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}\ .$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принимают все значения из $\mathbb{R}$, а параметры обозначаются греческими буквами, подалгебры с различными значениями параметров не сопряжены друг другу.

Базис подалгебры будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство. Для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ из [4] найдем изотропно-точные пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и выберем из них нередуктивные, далее определим пары (и подалгебры), допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны.

Рассмотрим, например, случай 4.21.

Лемма 1. *Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 4.21, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и* *только одной из пар 4.21.24, 4.21.25 ($\delta = 0, 1$ соответственно):*

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

,

где $\alpha < -1/4$.

Доказательство. Использовав тождество Якоби, имеем $[e_4, u_3] = se_4 + u_1$, $[e_2, u_3] = se_2$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = b_4e_4 + \beta_1u_1$, $[u_2, u_3] = b_4e_3 + c_4e_4 + \gamma_1u_1 + (\beta_1 - s)u_2$, $s \neq 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}' \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_j) = (1/s)u_j$, $j = \overline{1,3}$, установит эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет указанный вид при $s = 1$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}'' \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 4$, $\pi(e_3) = e_3 - (\gamma_1/2)e_4$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2 - (\gamma_1/2)e_4 - (\gamma_1/2)u_1$, $\pi(u_3) = u_3$, установит эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}'', \mathfrak{g}'')$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя примет найденный вид при $s = 1, \gamma_1 = 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}''' \to \bar{\mathfrak{g}}''$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_1) = u_1 - (\beta_1/2)e_4$, $\pi(u_2) = u_2 - (\beta_1/2)e_3$, $\pi(u_3) = u_3 + (\beta_1/2)e_1$, задает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}'', \mathfrak{g}'')$ и $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$, где последняя имеет указанный вид при $s = 1, \gamma_1 = \beta_1 = 0$.

Если $c_4 = 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$ эквивалентна паре 4.21.24.

Если $c_4 \neq 0$, то пары $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$ и 4.21.25 эквивалентны посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_{25} \to \bar{\mathfrak{g}}'''$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 4, \pi(e_3) = (1/c_4)e_3, \pi(u_1) = u_1, \pi(u_2) = (1/c_4)u_2$, $\pi(u_3) = u_3$.

Рассмотрим пары типа 4.21.24, а именно $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$ с параметрами α и α' соответственно. Покажем, что при $\alpha \neq \alpha'$ эти пары не эквивалентны. Пусть $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{g}}_{24}/D^2\bar{\mathfrak{g}}_{24}$ и φ — естественная проекция $\bar{\mathfrak{g}}_{24}$ на $\bar{\mathfrak{a}}$. Тогда $\mathfrak{a} = \varphi(\mathfrak{g}_{24})$ для пары $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$. Аналогично определим $\bar{\mathfrak{a}}'$ и $\mathfrak{a}'$ для пары $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$. Покажем, что пары $(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ и $(\bar{\mathfrak{a}}', \mathfrak{a}')$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Предположим, что эти пары эквивалентны при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{a}} \to \bar{\mathfrak{a}}'$. Из равенства $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ для базисных векторов $\bar{\mathfrak{a}}$ с учетом $\pi(D\bar{\mathfrak{a}}) \subset D\bar{\mathfrak{a}}'$, $\pi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$, $\pi(D\mathfrak{a}) \subset D\mathfrak{a}'$ и $\pi(Z(\mathfrak{a})) \subset Z(\mathfrak{a}')$ следует, что $\alpha' = \alpha$. Поэтому пары $(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ и $(\bar{\mathfrak{a}}', \mathfrak{a}')$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Следовательно, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Аналогично пары типа 4.21.25 (с параметрами α и α' соответственно) не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$, пары 4.21.25 и 4.21.24 также не эквивалентны.

Для каждой пары найдем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения и определим, когда кривизна может быть только ненулевой. Прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность в случаях 4.21.24 и 4.21.25 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}$$

(здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$). В случае 4.21.24 тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \geqslant -1/4$ уравнение ${p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha = 0$ имеет решение, т. е. если $p_{1,3}$ — корень этого уравнения, а $q_{1,3} = 0$, то тензор кривизны нулевой. Если $\alpha < -1/4$, то при любых значениях параметров $p_{1,3}$, $q_{1,3} \in \mathbb{R}$ тензор кривизны не может оказаться нулевым.

Аналогично в случае 4.21.25 тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} - 1 \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор ненулевой при $\alpha < -1/4$. Тензор кручения в случаях 4.21.24, 4.21.25 — $(0,0,0)$, $(p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0)$, $(2q_{1,3}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$. □

Лемма 2. *Любая нередуктивная пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа 2.13, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 2.13.7, 2.13.8, где*

2.13.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	$e_2 + u_1$
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$\beta e_1 + \alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2 - u_1$	$-\alpha u_1$	$-\beta e_1 - \alpha u_2$	0

(здесь $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$*), а 2.13.7 совпадает с 2.13.8, кроме* $[u_2, u_3] = (1-\alpha)e_1 + e_2 + \alpha u_2$, $\alpha \neq 3/2$.

Доказательство. В силу тождества Якоби $[e_2, u_3] = se_1 + te_2 + u_1$, $[e_1, u_1] = [e_2, u_2] = re_2$, $[u_1, u_2] = a_1e_1 + a_2e_2 + \alpha_1u_1$, $[u_2, u_3] = c_1e_1 + c_2e_2 + \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3$, $[u_1, u_3] = b_2e_2 + \beta_1u_1 + \beta_2u_2$ и

$$\begin{cases} \alpha_1r - r^2 = 0, \ a_1 + rs = 0, \ \beta_1r - a_2 - rt = 0, \ \beta_2 - \alpha_1 - r = 0, \ \beta_2r + rs = 0, \ \beta_1r + \beta_2t + a_2 = 0, \\ \gamma_1r - b_2 = 0, \ \beta_2s + a_1 - rs = 0, \ \beta_2 + s + \alpha_1 - r = 0, \ a_2r - 2\beta_1a_1 = 0, \ a_2 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1\beta_2 = 0, \\ a_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_2^2 = 0, \ a_2t + c_1r - b_2r - 2\beta_1a_2 + \alpha_1b_2 - \beta_2b_2 = 0. \end{cases}$$

При $r \neq 0$ имеем $[e_2, u_3] = -2re_1 + u_1$, $[u_1, u_2] = r^2e_1 + ru_1$, $[u_1, u_3] = pre_2 + 2ru_2$, $[u_2, u_3] = 2pe_1 + ce_2 + pu_1 + 2ru_3$. Полученная пара не допускает инвариантных аффинных связностей и не входит в рассматриваемый в работе класс.

При $r = 0$ имеем $a_1 = a_2 = b_2 = \alpha_1 = \beta_2 = s = 0$.

Если $t \neq 0$, то эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ задается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$, $\pi(u_i) = (1/t)u_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. У пары $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ $[e_1, u_1] = [e_2, u_2] = 0$, $[e_2, u_3] = e_2 + u_1$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha u_1$, $[u_2, u_3] = \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta u_1 + \alpha u_2$. Заметим, что любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такого вида однозначно определяется набором параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, а две пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ с наборами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, такие, что $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = b(\alpha + \beta - 1)r/a + a\gamma$, $\delta' = a\delta - b/a + c$. Действительно, предположим, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентны при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}'$. Пусть $H = (h_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5}$ – матрица отображения π. Поскольку $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$, имеем $h_{ij} = 0$ при

$3 \leqslant i \leqslant 5$ и $j = 1, 2$. Поскольку π — изоморфизм алгебр Ли, $\pi([x,y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ для $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Проверив это условие для векторов из базиса, получим искомый результат. Таким образом, классификация (с точностью до эквивалентности) пар указанного вида сводится к классификации четверок $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ с точностью до преобразований, определенных ранее. После прямых вычислений получим, что каждая четверка эквивалентна только одной из следующих: $(\alpha, \beta, 0, 0)$, $(\alpha, 1-\alpha, 1, 0)$. Соответствующие пары – 2.13.8 и 2.13.7.

Если $t = 0$, то рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получаем пары, являющиеся редуктивными, не входящие в рассматриваемый в работе класс.

Аффинная связность в случаях 2.13.7, 2.13.8 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1/2 & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны в случае 2.13.7

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3/4+\alpha/2 & 3q_{1,3}/2+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1-\alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}-3/4+{p_{1,3}}^2+\alpha/2-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \neq 3/2$ тензор кривизны ненулевой, в случае 2.13.8 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4-\beta-\alpha/2 & 3q_{1,3}/2+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}+1/4+{p_{1,3}}^2-\beta-\alpha/2-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$ тензор кривизны ненулевой, тензор кручения — $(0,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha, 0, 0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2}, p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha, 0)$. □

Лемма 3. *Любая нередуктивная пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *типа 3.25, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.25.25, 3.25.26 (при* $\delta = 0, 1$ *соответственно):*

3.25.25(26).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	0	0	u_1
e_3	e_2	0	0	0	0	$-e_3+u_2$
u_1	0	0	0	0	0	$\alpha e_2+(1+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	0	$\delta e_2+\alpha e_3+\beta u_2$
u_3	$-e_1$	$-u_1$	e_3-u_2	$-\alpha e_2-(1+\beta)u_1$	$-\delta e_2-\alpha e_3-\beta u_2$	0

(*здесь* $\alpha < -(\beta+1)^2/4$).

Доказательство. С учетом тождества Якоби получаем $[e_1, u_3] = pe_1 + re_3$, $[e_2, u_2] = se_2$, $[e_3, u_2] = te_1 + 2se_3$, $[e_3, u_3] = -pe_3 + u_2$, $[u_1, u_2] = -\gamma_2 se_2 - su_1$, $[u_1, u_3] = (rt + 2sp)e_1 + b_2e_2 + (\gamma_2 + p)u_1$, $[u_2, u_3] = \gamma_1 se_1 + c_2e_2 + b_2e_3 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + 2su_3$, $\gamma_2 t - 2pt = 0$, $2\gamma_2 s - 2sp - tr = 0$, $rs = 0$, $s(tr + 2sp) = 0$, $\gamma_2 sp + 2\gamma_2^2 s - 3sb_2 = 0$, $rt + 2\gamma_2 s + 4sp = 0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в случае 2.13.

Аффинная связность в случаях 3.25.25, 3.25.26 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

заменой базиса можно получить $r_{1,3} = 0$, тензор кривизны в случаях 3.25.25 и 3.25.26 ($\delta = 0, 1$ соответственно) —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} - \delta - \beta q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha < -(\beta + 1)^2/4$ тензор кривизны ненулевой. Тензор кручения в случаях 3.25.25, 3.25.26 — $(0, 0, 0)$, $(p_{1,3} - r_{1,1} - 1 - \beta, 0, 0)$, $(2q_{1,3}, p_{1,3} - r_{1,1} - 1 - \beta, 0)$. $\square$

Лемма 4. *Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8, 2.20.9, 2.20.12, 2.20.14, 2.20.22:*

2.20.3, 2.20.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	$e_1 + u_1$	0
e_2	0	0	0	$\delta e_1 + e_2$	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$-e_1 - u_1$	$-\delta e_1 - e_2$	$-2u_1$	0	$e_2 - u_3$
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2 + u_3$	0

,

(здесь $\delta = 0, 1$),

2.20.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	e_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

,

2.20.12, 2.20.14.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	δe_1	$-e_2 + u_1$
u_1	0	0	0	0	$-3u_1$
u_2	$-u_1$	$-\delta e_1$	0	0	$e_2 - u_2$
u_3	$2e_1$	$e_2 - u_1$	$3u_1$	$u_2 - e_2$	0

(здесь $\delta = \pm 1$),

2.20.9.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1 + (\alpha + 1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1 + \alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1 - (\alpha + 1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1 - \alpha u_2$	0

,

2.20.22.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha-1)u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	$-u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{a}=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}u_1$ — коммутативная подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{a}=Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$. Докажем, что $\mathfrak{a}$ – идеал $\bar{\mathfrak{g}}$. Очевидно, что $[e_1,x]\in\mathfrak{a}$ и $[e_2,x]\in\mathfrak{a}$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. Предположим, что существует $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что $[u_1,x]\notin\mathfrak{a}$. Тогда существует $y\in\mathfrak{g}$, такое, что $\big[y,[u_1,x]\big]\neq 0$. Но $\big[u_1,[x,y]\big]=0$ (поскольку $[x,y]\in\mathfrak{a}$) и $\big[x,[y,u_1]\big]=0$ (поскольку $[y,u_1]=0$). Тождество Якоби для тройки (x,y,u_1) $\big[y,[u_1,x]\big]+\big[u_1,[x,y]\big]+\big[x,[y,u_1]\big]=0$ не выполняется, приходим к противоречию, поэтому $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал $\bar{\mathfrak{g}}$.

Если алгебра Ли не содержит подалгебр, дополнительных к $\mathfrak{a}$, то $[\,e_1,e_2\,]=0$, $[\,e_1,u_1\,]=0$, $[\,e_1,u_2\,]=u_1$, $[\,e_1,u_3\,]=0$, $[\,e_2,u_1\,]=0$, $[\,e_2,u_2\,]=0$, $[\,e_2,u_3\,]=u_1$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — идеал, можно считать, что $[\,u_1,u_2\,]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_1u_1$, $[\,u_1,u_3\,]=b_1e_1+b_2e_2+\beta_1u_1$, $[\,u_2,u_3\,]=c_1e_1+c_2e_2+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[\,u_1,u_2\,]=-\gamma_3u_1$, $[\,u_1,u_3\,]=\gamma_2u_1$. Положим $u_2'=u_2+x_1e_1+x_2e_2+x_3u_1$ и $u_3'=u_3+y_1e_1+y_2e_2+y_3u_1$. Подпространство $\mathbb{R}u_2'\oplus\mathbb{R}u_3'$ не является подалгеброй, дополнительной к $\mathfrak{a}$, тогда и только тогда, когда уравнение $[\,u_2',u_3'\,]=su_2'+tu_3'$ неразрешимо (относительно s,t, x_i,y_j, $i,j=\overline{1,3}$). Отсюда следует, что $s=\gamma_2$, $t=\gamma_3$, а переменные x_i,y_j удовлетворяют уравнениям $\gamma_2x_1+\gamma_3y_1=c_1$, $\gamma_2x_2+\gamma_3y_2=c_2$, $y_1-x_2=\gamma_1$. Система неразрешима, если $\gamma_2=\gamma_3=0$ и $c_1^2+c_2^2\neq 0$. В этом случае пара является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс. Аналогично рассматриваются другие случаи.

Если алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит подалгебру $\mathfrak{b}$, дополнительную к идеалу $\mathfrak{a}$, то пусть d — проекция $\bar{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{a}$, соответствующая разложению $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. Тогда $d\in Der(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})=\{\phi\in Der(\bar{\mathfrak{g}})|\,\phi(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\}$. Действительно, поскольку $\mathfrak{g}\in\mathfrak{a}$, имеем $d(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$. Для любой дополнительной подалгебры $\mathfrak{b}$ построим алгебру Ли $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{b})$ следующим образом: $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{g}}\times\mathbb{R}$, где скобочная операция $\big[(x,a),(y,b)\,\big]=\big([\,x,y\,]+\mathrm{ad}(y)-bd(x),0\big)$. Здесь d — проекция $\bar{\mathfrak{g}}$ на идеал $\mathfrak{a}$. Заметим, что $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$ — изотропно-точная пара типа 3.20 ($\lambda=\mu=0$), пары $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$, соответствующие различным дополнительным подалгебрам $\mathfrak{b}$, попарно эквивалентны. Поскольку $\dim\bar{\mathfrak{p}}=\dim\bar{\mathfrak{g}}+1$, $\bar{\mathfrak{g}}$ — максимальная подалгебра в $\bar{\mathfrak{p}}$ такая, что $\bar{\mathfrak{g}}\supset D\bar{\mathfrak{p}}$. Более того, алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ однозначно определяется подалгеброй $\mathfrak{g}$, а именно $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{p}$. Поэтому для того чтобы найти все пары, достаточно: для любой пары $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$ типа 3.20 ($\lambda=\mu=0$) отыскать (с точностью до действия группы $Aut(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$) все максимальные подалгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ в $\bar{\mathfrak{p}}$ коразмерности 1 такие, что $\bar{\mathfrak{g}}\supset D\bar{\mathfrak{p}}$; для любой найденной подалгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ построить пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{p}$; выбрать изотропно-точные пары типа 2.20 из полученных. Проведя вычисления, получим искомый результат.

Аффинные связности имеют следующий вид:
2.20.3 ($\delta=0$), 2.20.8 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0&p_{1,2}&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}q_{1,1}&q_{1,2}&q_{1,3}\\0&q_{1,1}+p_{1,2}+1&p_{1,3}\\0&\delta&q_{1,1}+1\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}&0\\0&p_{1,2}&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},\qquad\delta=0,1,$$

2.20.6

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 1 & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9 ($\delta=0$), 2.20.22 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}+\alpha & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+\alpha+1\end{pmatrix}, \quad \delta=0,1,$$

2.20.12 ($\delta=1$), 2.20.14 ($\delta=-1$)

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}-2 & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}-1\end{pmatrix}, \quad \delta=\pm 1.$$

Тензоры кривизны соответственно:
2.20.3 ($\delta=0$), 2.20.8 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2}+\delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}-p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}r_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-\delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & p_{1,2}-{p_{1,2}}^2-\delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}, \quad \delta=0,1,$$

2.20.6

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & -{p_{1,2}}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2 & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & -\alpha p_{1,2}+p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2-\alpha p_{1,3}+p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-\alpha q_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-1 & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,1}-\alpha p_{1,2} & {p_{1,3}}^2-\alpha p_{1,3}+p_{1,3}\\ 0 & -{p_{1,2}}^2 & -p_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,1}\end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta=1$), 2.20.14 ($\delta=-1$)

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2+\delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}+p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2+2p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & -q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-\delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1}+p_{1,2} & {p_{1,3}}^2+2p_{1,3} \\ 0 & -{p_{1,2}}^2-\delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1} \end{pmatrix}, \qquad \delta=\pm 1,$$

2.20.22

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_{1,1} & p_{1,2}\alpha+p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,2} & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}\alpha+p_{1,3}+q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}\alpha+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}\alpha+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2+p_{1,3} \\ 0 & -1-{p_{1,2}}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

а тензоры кручения:
2.20.3, 2.20.8 — $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}+2-p_{1,2})$;
2.20.6 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.9 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-2\alpha,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-2\alpha,q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.12, 2.20.14 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}+3,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}+3,q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.22 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,1,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,q_{1,1}-p_{1,2})$.

Очевидно, что, например, в случаях 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8 для того чтобы тензор кривизны был нулевым, требуется $p_{1,3}=0$, но тогда $R(u_2,u_3)\neq 0$ при любых значениях остальных параметров. В остальных случаях рассуждения аналогичны. □

Аналогично любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 3.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.20.22, 3.20.27:

$3.20.22.\lambda=0,\mu=1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	e_3-u_3
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3+u_3$	0

,

$3.20.27.\lambda=1/5,\mu=2/5$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

.

В случае 3.20.27 аффинная связность и тензор кривизны имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},$$

очевидно, что тензор кривизны ненулевой; тензор кручения нулевой.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}q_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & q_{1,1}+1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & r_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & p_{1,2} & 0\end{pmatrix},$$

заменой базиса можно получить $r_{1,3}=0$, а тензор кривизны

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2-2p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2p_{1,2}-{p_{1,2}}^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны ненулевой при любых значениях параметра $p_{1,2}$.

Тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,q_{1,1}+2-p_{1,2})$.

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 1.5, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна 1.5.21, где

1.5.21.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	u_1	$-e_1$
u_2	$-e_1$	$-u_1$	0	0
u_3	$-u_1$	e_1	0	0

.

Аффинная связность в случае 1.5.21 —

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3}\\ 0 & 0 & q_{1,1}-1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3}\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

тензор кривизны —

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & p_{1,2}q_{2,3}-2p_{1,3}-q_{1,2}p_{2,3}\\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-2p_{2,3}-q_{2,2}p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-p_{1,2}p_{2,3} & p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & p_{1,2}r_{2,3}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}p_{2,3}+1\\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & p_{2,3}r_{1,1}+2p_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}p_{2,3}\\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-q_{1,2}p_{2,3} & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3}+r_{1,3}\\ -q_{2,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1} & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & \begin{gathered}q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+\\ +p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}+r_{2,3}\end{gathered}\\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & -p_{1,2}q_{2,3}\end{pmatrix},$$

а тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},q_{2,3}-r_{2,2},$ $q_{1,1}+1-p_{1,2})$, при любых значениях параметров тензор кривизны ненулевой.

Продолжая таким же образом для всех подалгебр, получаем, что трехмерных нередуктивных пар, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны, за исключением представленных в доказательстве теоремы, не существует. □

Таким образом, нередуктивные пространства, не допускающие связностей нулевой кривизны локально имеют вид 4.21.24 ($\alpha < -1/4$), 4.21.25 ($\alpha < -1/4$), 3.20.22, 3.20.27, 3.25.25 ($\alpha < -(\beta+1)^2/4$), 3.25.26 ($\alpha < -(\beta+1)^2/4$), 2.13.7 ($\alpha \neq 3/2$), 2.13.8 ($\beta \neq 1/4 - \alpha/2$), 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8, 2.20.9, 2.20.12, 2.20.14, 2.20.22, 1.5.21. Заметим, что у всех найденных нередуктивных пространств группа преобразований разрешима, т.е. нередуктивных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих связности только ненулевой кривизны, не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описаны все трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли, а также сами аффинные связности на указанных пространствах, их тензоры кривизны и кручения.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Библиографический список

1. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig : Teubner, 1893. Vol. 3. 830 p.
2. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ АН СССР, 1988. Т. 20. С. 103–240.
3. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ АН СССР, 1988. Т. 28. С. 5–297.
4. *Можей Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
5. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М. : Наука, 1966. 496 с.
6. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
7. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76, № 1. P. 33–65.
8. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N. Y. : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1; 1969. Vol. 2.
9. *Можей Н. П.* Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 413–421. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.
10. *Рашевский П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. № 8. С. 82–92.

Образец для цитирования:

Можей Н. П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 381–393. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.

Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, orcid.org/0000-0001-9237-7208, Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6, P. Brovki Str., Minsk, Belarus, 220013, mozheynatalya@mail.ru

When a homogeneous space admits an invariant affine connection? If there exists at least one invariant connection then the space is isotropy-faithful, but the isotropy-faithfulness is not sufficient for the space in order to have invariant connections. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. The purpose of the work is a description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces, admitting invariant affine connections of nonzero curvature only, and the affine connections, curvature and torsion tensors. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an affine connection, curvature and torsion tensors, a reductive space are defined. The local description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces, admitting connections of nonzero curvature only, is given. The local classification of such spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors are found.

Key words: affine connection, curvature tensor, reductive space, transformation group, Lie algebra.

References

1. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen*. Leipzig, Teubner, 1893, vol. 3. 830 p.
2. Gorbatsevich V. V., Onishchik A. L. Lie groups of transformations. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1988, vol. 20, pp. 103–240 (in Russian).
3. Alekseevskii D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1988, vol. 28, pp. 5–297 (in Russian).
4. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan', Kazan' Univ. Press, 2015. 394 p. (in Russian).
5. Petrov A. Z. *Novyye metody v obshchey teorii otnositel'nosti* [New methods in the general theory of relativity]. Moscow, Nauka, 1966. 496 p. (in Russian).
6. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive Lie transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1; 1969, vol. 2.
9. Mozhey N. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izv. Saratov Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 413–421 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.
10. Rashevski P. K. Simmetricheskiye prostranstva affinnoy svyaznosti s krucheniyem [Symmetric spaces of affine connection with torsion]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis], 1969, vol. 8, pp. 82–92 (in Russian).

Cite this article as:

Mozhey N. P. Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 381–393 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.