МЕХАНИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 532.516:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. А. Блинков[1], **Ю. Н. Кондратова**[2], **А. В. Месянжин**[3], **Л. И. Могилевич**[4]

[1]Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, BlinkovUA@info.sgu.ru

[2]Кондратова Юлия Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, kondratovaun@info.sgu.ru

[3]Месянжин Артем Вячеславович, ведущий математик, ОАО Конструкторское бюро промышленной автоматики, Саратов, a.v.mesyanzhin@gmail.com

[4]Могилевич Лев Ильич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., mogilevich@sgu.ru

В современной волновой динамике известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Они получены на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. На основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, получены системы обобщенных уравнений КдВ. В представленной работе проведено исследование модели волновых явлений двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа – Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка – Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики и получить численные решения задач Коши при точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек в качестве начального условия.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы — упругой цилиндрической оболочки — проведено аналогичное исследование в [2, 3], а с учетом жидкости — в [4].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [5,6], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [7, 8], отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость (рис. 1). Введем следующие обозначения: δ — ширина щели, занимаемой жидкостью, R — радиус срединной поверхности оболочки, $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ — внутренний радиус внешней оболочки, $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внешний радиус внутренней оболочки, $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек, $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ — их толщины. Все механические перемещения внешней оболочки сверху будем обозначать индексом (1), а внутренней — индексом (2).

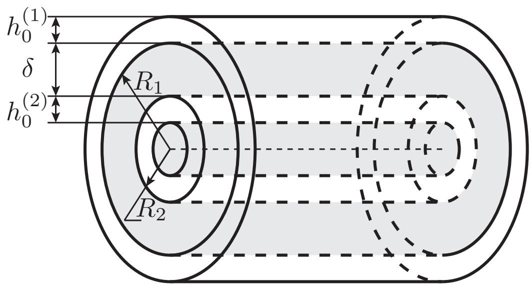

Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа – Лява, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [9]

$$\sigma_i = Ee_i \mp me_i^3,$$

где E — модуль Юнга, m — константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат рассматриваются в случае осесимметричного течения. На границе оболочек и жидкости (рис. 1) при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде [10]

$$\frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2}\left\langle \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2}{U_x^{(i)}}^2 + \frac{1}{2}{W_x^{(i)}}^2 + \frac{{h_0^{(i)}}^2}{24}{W_{xx}^{(i)}}^2 - \mu_0\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right] \times\right.$$

$$\left.\times\left\{1 \mp \frac{4}{3}\frac{m}{E}\left[\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)^2 + U_x^{(i)}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right]\right\}\right\rangle_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1),$$

$$\frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2}\left\langle \frac{{h_0^{(i)}}^2}{12}\left(W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)}W_{xx}^{(i)}\right)_{xx} - \left\{W_x^{(i)}\left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2}{U_x^{(i)}}^2 + \frac{1}{2}{W_x^{(i)}}^2 + \right.\right.\right.$$

$$+\frac{h_0^{(i)^2}}{24}W_{xx}^{(i)^2}-\mu_0\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\Bigg)\left[1\mp\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left(\left(U_x^{(i)}-\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)^2+U_x^{(i)}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)\right]\Bigg\}_x-$$

$$-\frac{1}{R}\left(\mu_0U_x^{(i)}+\frac{1}{2}\mu_0U_x^{(i)^2}+\frac{1}{2}\mu_0W_x^{(i)^2}+\frac{h_0^{(i)^2}}{24}\mu_0W_{xx}^{(i)^2}-\frac{W^{(i)}}{R}\right)\times$$

$$\times\left[1\pm\frac{4}{3}\frac{m}{E}\left(\left(U_x^{(i)}-\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)^2+U_x^{(i)}\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}\right)\right]\Bigg\rangle+\rho_0h_0^{(i)}W_{tt}^{(i)}=(-1)^{i-1}q_n+\tilde{q}_n(i-1).$$

Здесь $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек, μ_0 — коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность, $U^{(i)}$, $W^{(i)}$ — продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны, x — продольная координата, t — время, q_x^i, q_n — напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками, $\tilde{q}_x$, $\tilde{q}_n$ — напряжения со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Для соосных цилиндрических оболочек, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость, кольцевой слой жидкости имеет ширину значительно меньше радиуса оболочек, как и толщина жидкости во внутренней оболочке. Их отношение можно выбрать в качестве малого параметра для моделей гидромеханики кольцевого и кругового сечения. Уравнения этих моделей связаны через краевые условия прилипания жидкости с уравнениями динамики оболочек, для которых в качестве малого параметра выбираем отношение амплитуды продольного перемещения и прогиба к характерной длине волны в оболочках. С помощью комбинирования метода многих масштабов и метода сращиваемых асимптотических разложений, проводя вычисления аналогичные [8], получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}\phi_t^{(1)}+6\sigma_0\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)}+\phi_{\eta\eta\eta}^{(1)}\mp6\sigma_1\phi^{(1)^2}\phi_\eta^{(1)}+\phi^{(1)}-\phi^{(2)}=0,\\ \phi_t^{(2)}+6\sigma_0\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)}+\phi_{\eta\eta\eta}^{(2)}\mp6\sigma_1\phi^{(2)^2}\phi_\eta^{(2)}+\phi^{(2)}-\phi^{(1)}-\sigma\phi^{(2)}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Система уравнений (1) имеет в качестве точного решения с верхнем знаком $-$ при σ_1 и при $\sigma=0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее точное решение:

$$\phi^{(1)}=\phi^{(2)}=\frac{\sigma_0}{2\sigma_1}\pm\frac{k}{\sqrt{\sigma_1}}\operatorname{th}\left(k\left(\eta+\left(2k^2-\frac{3\sigma_0^2}{2\sigma_1}\right)t\right)\right).\tag{2}$$

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работах [11,12] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. Построение базиса Грёбнера соответствующих разностных многочленов позволяет построить разностную схему, которая автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (1), аналогичную схеме Кранка – Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\frac{{u^{(1)}}_j^{n+1}-{u^{(1)}}_j^{n}}{\tau}+3\sigma_0\frac{({u^{(1)}}^{2\,n+1}_{j+1}-{u^{(1)}}^{2\,n+1}_{j-1})+({u^{(1)}}^{2\,n}_{j+1}-{u^{(1)}}^{2\,n}_{j-1})}{4h}+$$

$$+\frac{({u^{(1)}}_{j+2}^{n+1}-2{u^{(1)}}_{j+1}^{n+1}+2{u^{(1)}}_{j-1}^{n+1}-{u^{(1)}}_{j-2}^{n+1})+({u^{(1)}}_{j+2}^{n}-2{u^{(1)}}_{j+1}^{n}+2{u^{(1)}}_{j-1}^{n}-{u^{(1)}}_{j-2}^{n})}{4h^3}\mp$$

$$\mp2\sigma_1\frac{({u^{(1)}}^{3\,n+1}_{j+1}-{u^{(1)}}^{3\,n+1}_{j-1})+({u^{(1)}}^{3\,n}_{j+1}-{u^{(1)}}^{3\,n}_{j-1})}{4h}+\frac{{u^{(1)}}_j^{n+1}+{u^{(1)}}_j^{n}}{2}-\frac{{u^{(2)}}_j^{n+1}+{u^{(2)}}_j^{n}}{2}=0,$$

$$\frac{{u^{(2)}}_j^{n+1}-{u^{(2)}}_j^{n}}{\tau}+3\sigma_0\frac{({u^{(2)}}^{2\,n+1}_{j+1}-{u^{(2)}}^{2\,n+1}_{j-1})+({u^{(2)}}^{2\,n}_{j+1}-{u^{(2)}}^{2\,n}_{j-1})}{4h}+$$

$$+\frac{({u^{(2)}}_{j+2}^{n+1}-2{u^{(2)}}_{j+1}^{n+1}+2{u^{(2)}}_{j-1}^{n+1}-{u^{(2)}}_{j-2}^{n+1})+({u^{(2)}}_{j+2}^{n}-2{u^{(2)}}_{j+1}^{n}+2{u^{(2)}}_{j-1}^{n}-{u^{(2)}}_{j-2}^{n})}{4h^3}\mp$$

$$\mp2\sigma_1\frac{({u^{(2)}}^{3\,n+1}_{j+1}-{u^{(2)}}^{3\,n+1}_{j-1})+({u^{(2)}}^{3\,n}_{j+1}-{u^{(2)}}^{3\,n}_{j-1})}{4h}+$$

$$+\frac{u(2)^{n+1}_j + u(2)^n_j}{2} - \frac{u(1)^{n+1}_j + u(1)^n_j}{2} - \sigma\frac{u(2)^{n+1}_j + u(2)^n_j}{2} = 0.$$

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работах [4, 8], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой ее не было в начальный момент времени.

На рис. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов (*а, б* — для внешней оболочки, *в, г* — для внутренней оболочки).

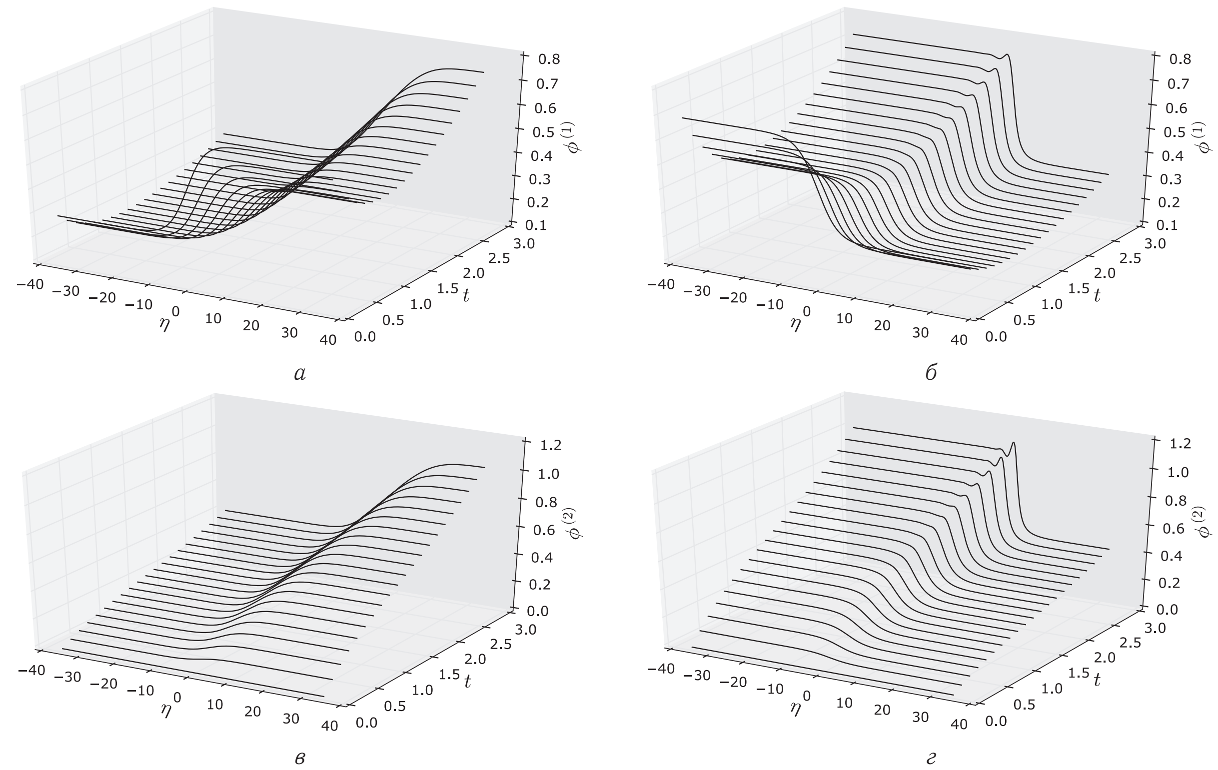

Рис. 2. Графики численного решения уравнений (1) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0.7$, с начальным условием $\phi^{(2)} = 0$ и с $\phi^{(1)}$, взятого из точного решения (2) при $t = 0$, $k = 0.2$ со знаком $+$ (*а, г*) и знаком $-$ (*б, в*)

Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра $\sigma > 0$. Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном росте во внутренней оболочке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Библиографический список

1. *Громека И. С.* К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр. соч. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1952. С. 149–171.
2. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
3. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акустический журн. 2001. Т. 47, № 3. С. 359–363.
4. *Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2013. Т. 3. С. 42–51.
5. *Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И.* Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 12–18.
6. *Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Иванов С. В.,*

Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 193–202. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
7. *Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 3. С. 336–345. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
8. *Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.* Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
9. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М. : Иностр. лит., 1961. 778 с.
10. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
11. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A.* Involution and difference schemes for the Navier – Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. 2009. P. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
12. *Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R.* On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier – Stokes Equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 8136 of Lecture Notes in Computer Science. 2013. P. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4.

Образец для цитирования:
Блинков Ю. А., Кондратова Ю. Н., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 331–336. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.

Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells Filled with Viscous Liquid

Yu. A. Blinkov[1], Yu. N. Kondratova[2], A. V. Mesyanzhin[3], L. I. Mogilevich[4]

[1]Yury A. Blinkov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, BlinkovUA@info.sgu.ru
[2]Yulia N. Kondratova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, kondratovaun@info.sgu.ru
[3]Artem V. Mesyanzhin, Industrial Automatics Design Bureau JSC, 239, B. Sadovaya st., 410005, Saratov, Russia, a.v.mesyanzhin@gmail.com
[4]Lev I. Mogilevich, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politekhnicheskaya st., 410054, Saratov, Russia, mogilevich@sgu.ru

There exist wave motion mathematical models in infinitely long geometrically nonlinear shells filled with viscous incompressible liquid. They are based on related hydroelasticity problems, described by dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized KdV equations. Mathematical models of wave process in infinitely long geometrically nonlinear coaxial cylindrical shells are obtained by means of the small parameter perturbation method. The problems differ from the already known ones by the consideration of viscous incompressible liquid presence. The system of generalized KdV equations is obtained on the basis of related hydroelasticity problems, described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding boundary conditions. This paper deals with investigating of wave occurrence model of the two geometrically and physically nonlinear elastic coaxial cylindrical Kirchhoff – Love type shells containing viscous incompressible liquid between and inside them. The difference Crank – Nicholson type schemes aimed at investigating equations systems with the consideration of liquid impact are obtained with the help of Gröbner basis construction. To generate these difference schemes, basic integral difference correlations, approximating the initial equations system, are used. The use of Gröbner basis techniques makes it possible to generate the schemes allowing to obtain discrete preservation laws analogues to the initial differential equations. To do this, equivalent transformations were made. On the basis of computational algorithm the software allowing to construct graphs and to obtain Cauchy problem numerical solution was developed, using the exact solutions of the coaxial shell dynamics equations system as an initial condition.

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00175).

References

1. Gromeka I. S. K teorii dvizheniia zhidkosti v uzkikh tsilindricheskikh trubakh [On the Theory of Fluid Motion in Narrow Cylindrical Tubes]. *Collected works*, Moscow, Leningrad, Publ. House of the Academy of Sciences of the USSR, 1952, pp. 149–171 (in Russian).
2. Zemlianukhin A. I., Mogilevich L. I. Nelineinye volny deformatsii v tsilindricheskikh obolochkakh

[Nonlinear Waves of Deformation in Cylindrical Shells]. *Izv. vuzov. Prikladnaia nelineinaia dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52–58 (in Russian).
3. Zemlianukhin A. I., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves in Inhomogeneous Cylindrical Shells: A New Evolution Equation. *Akusticheskij Zhurnal*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 359–363 (in Russian).
4. Blinkov Yu. A., Kovaleva I. A., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in between. *Vestnik RUDN. Ser. Math., Inform., Physics*, 2013, vol. 3, pp. 42–51 (in Russian).
5. Blinkova A. Iu., Ivanov S. V., Kovalev A. D., Mogilevich L. I. Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian).
6. Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 193–202 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
7. Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Comp. Contin. Mech.*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336–345 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
8. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
9. Kauderer G. *Nelinejnaja mehanika* [Nonlinear mechanics]. Moscow, Publ. Inostrannaja literatura, 1961, 778 p. (in Russian).
10. Vol'mir A. S. *Nelineinaia dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p. (in Russian).
11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier – Stokes equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science, 2009, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
12. Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier – Stokes Equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 8136 of Lecture Notes in Computer Science, 2013, pp. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4.

Please cite this article in press as:
Blinkov Yu. A., Kondratova Yu. N., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells Filled with Viscous Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 331–336 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.

УДК 629

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННОГО УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ

Е. А. Козлов[1], Ю. Н. Челноков[2], И. А. Панкратов[3]

[1]Козлов Евгений Александрович, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ewgeni11_91@mail.ru

[2]Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

[3]Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru