УДК 517.518

ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ В ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ УСРЕДНЕННОГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

С. С. Волосивец[1], А. Е. Вежлев[2]

[1]Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Вежлев Арсений Евгеньевич, студент механико-математического факультета, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, avezhlev@yandex.ru

В настоящей статье мы изучаем вложения некоторых пространств функций обобщенной ограниченной вариации в классы функций с заданной мажорантой усредненного модуля непрерывности, введенного Б. Сендовым и В. Поповым. Мы рассматриваем пространства $\Lambda BV^{(p)}$ функций ограниченной $(\Lambda - p)$-вариации, предложенные Д. Ватерманом (при $p = 1$) и М. Шиба (при $p > 1$), а также пространства $V(v(n))$ функций с заданной мажорантой модуля вариации. Последняя величина была введена З. А. Чантурия. Доказываются необходимые и достаточные условия (критерии) таких вложений. Ранее подобные вложения в классы функций с заданной мажорантой обычного интегрального модуля непрерывности изучались Ю. Е. Куприковым, У. Гогинавой и В. Цхадая, М. Хормози и другими. Даны приложения полученных результатов к оценкам погрешности некоторых квадратурных формул.

Ключевые слова: усредненный модуль непрерывности, пространство $\Lambda BV^{(p)}$. модуль вариации, вложение, квадратурная формула.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-255-266

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, понятие функции ограниченной вариации было введено К. Жорданом (Jordan) [1], который применил это понятие для получения признака равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной функции. В целях изучения рядов Фурье Н. Винер (Wiener) [2] рассмотрел функции ограниченной p-вариации при $p = 2$. Первый результат, связанный с интегральной гладкостью функций ограниченной вариации, принадлежит Г. Харди (Hardy) и Дж. Литтлвуду (Littlewood) [3]. Они показали, что f эквивалентна функции ограниченной вариации на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|\, dx = O(h), \qquad h \in [0, b-a].$$

Для функции f ограниченной p-вариации на $[a, b]$, $1 < p < \infty$, Л. Юнг (Young) [4] показал, что $f \in Lip(1/p, p)$. Эта тематика развивалась в работах А. П. Терехина [5, 6].

В 1972 г. Д. Ватерман (Waterman) [7] также в целях изучения равномерной сходимости рядов Фурье ввел понятие *функции ограниченной гармонической вариации* (HBV), а в 1976 г. он же [8] рассмотрел функции ограниченной Λ-вариации (ΛBV). М. Шиба (Shiba) [9] изучал функции ограниченной $p-\Lambda$-вариации ($\Lambda BV^{(p)}, p \geqslant 1$), при $p = 1$ это понятие совпадает с понятием функции ограниченной Λ-вариации.

З. А. Чантурия [10] рассмотрел модуль вариации функции.

Введенные в [7–10] определения применялись в основном к равномерной и абсолютной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе. Долгое время после опубликования работ [3–6] вопросы оценки интегральной гладкости для функций обобщенной ограниченной вариации не исследовались. Ю. Е. Куприков [11] оценил интегральный модуль непрерывности порядка p для функций класса ΛBV на отрезке и показал неулучшаемость этой оценки. Другой подход к таким оценкам был предложен Ж. Ли (Li) и Х. Вангом (Wang) [12].

М. Хормози (Hormozi) [13] дал критерий вложения $\Lambda BV^{(p)}$ в H_q^ω — пространство с заданной мажорантой $\omega(t)$ для L^q-модуля непрерывности. Ранее подобный критерий для вложения пространства функций с заданной мажорантой модуля вариации был установлен У. Гогинавой (Goginava) и В. Цхадая (Tskhadaia) [14].

В настоящей работе мы рассматриваем вложения пространств функций обобщенной ограниченной вариации в пространства $H_p^{\omega,\tau}$, где $\omega(t)$ является мажорантой усредненного модуля непрерывности. Подробнее изложение теории таких модулей см. в [15].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $f(x)$ определена и измерима на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) = f(1)$, тогда $f(x)$ можно считать 1-периодической. Пусть $\Pi = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ — конечный набор непересекающихся интервалов из промежутка вида $(d, d+1)$ и $v(\Pi, f) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$. Через $\#(\Pi)$ обозначим количество интервалов в Π.

Модулем вариации функции f назовем последовательность $\{v(n,f)\}_{n=1}^\infty$, определяемую равенством

$$v(n,f) = \sup_{\#(\Pi)=n} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|.$$

Данное определение принадлежит З. А. Чантурия [10]. Легко видеть, что $\{v(n,f)\}_{n=1}^\infty$ не отрицательна, возрастает с ростом n и является вогнутой, т. е. $v(n+1,f) - v(n,f) \leqslant v(n,f) - v(n-1,f), n \geqslant 2$. Поэтому будем рассматривать мажоранты $\{v(n)\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющие этим условиям. Если $B[0,1]$ — множество измеримых ограниченных функций, то

$$V(v(n)) = \{f \in B[0,1] : v(n,f) \leqslant Cv(n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Здесь C зависит от f, но не зависит от n.

Пусть теперь $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} = \infty$, $p \in [1,\infty)$, f и Π — такие же, как в начале параграфа. Будем говорить, что $f(x)$ принадлежит пространству функций ограниченной $(\Lambda - p)$-

вариации $\Lambda BV^{(p)}[0,1]$, если

$$V_{\Lambda,p}(f) = V_{\Lambda,p}(f,[0,1]) = \sup_{\Pi} V_{\Lambda,p}(f,\Pi) < \infty,$$

где $V_{\Lambda,p}(f,\Pi) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|f(b_k)-f(a_k)|^p}{\lambda_k}\right)^{1/p}$ для $\Pi = \{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$.

Далее используется обозначение $\Lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1}$. Если $\lambda_n \equiv 1$, то пространство $\Lambda BV^{(p)}[0,1]$ совпадает с пространством Винера $V_p[0,1]$ (см. [2]).

Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на отрезке $[0,1]$ и $f(0)=f(1)$ (т.е. f можно считать 1-периодичной), тогда k-я разность $f(x)$ с шагом h определена при всех h. Она задается формулой

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih),$$

где $\dbinom{k}{i} = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Локальный модуль гладкости задается равенством

$$\omega_k(f,x,\delta) = \sup\left\{|\Delta_h^k f(x)| : t, t+kh \in \left[x-\frac{k\delta}{2}, x+\frac{x\delta}{2}\right]\right\}.$$

Если $f(x)$ ограничена и измерима на $[0,1]$, то $\omega_k(f,x,\delta)$ также ограничена и измерима на $[0,1]$ (см. [15, гл. 1, теорема 1.3]). Поэтому можно рассмотреть усредненные модули непрерывности в $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$\tau_k(f,\delta)_p = \Big\|\omega_k(f,\cdot,\delta)\Big\|_p := \left(\int\limits_0^1 \omega_k^p(f,x,\delta)dx\right)^{1/p}.$$

Обычно для 1-периодических функций рассматривается другой модуль непрерывности в $L^p[0,1]$:

$$\omega_k(f,\delta)_p = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \Big\|\Delta_h^k f(\cdot)\Big\|_p.$$

Приведем необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть f и g измеримы и ограничены на $[0,1], 1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

1) $\tau_k(f,\delta)_p$ не убывает по δ и $\tau_k(f,n\delta)_p \leqslant (2n)^{k+1}\tau_k(f,\delta)_p$;

2) $\tau_k(f+g,\delta)_p \leqslant \tau_k(f,\delta)_p + \tau_k(g,\delta)_p$;

3) $\tau_k(f,\delta)_p \leqslant 2\tau_{k-1}\left(f, \frac{k}{k-1}\delta\right)_p$;

4) если f всюду на $[0,1]$ имеет производную, которая ограничена, то $\tau_k(f,\delta)_p \leqslant \leqslant \delta\tau_{k-1}\left(f', k\delta/(k-1)\right)_p$;

5) $\tau_k(f,\delta)_{p_1} \leqslant \tau_k(f,\delta)_{p_2}$ при $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$;

6) $\omega_k(f,\delta)_p \leqslant \tau_k(f,\delta)_p$.

Свойства 1)–4) из леммы 1 можно найти в [15, гл. 1, §1.3], свойство 5) легко следует из неравенства Гельдера, а свойство 6) см. в [15, гл. 1, теорема 1.4].

Лемма 2. *Пусть* $\{c_k\}_{k=0}^n$, $\{d_k\}_{k=0}^n$ *неотрицательны и убывают, причем для всех* $k=0,1,\ldots,n$ *выполнено неравенство* $\sum\limits_{i=0}^k c_i \leqslant \sum\limits_{i=0}^k d_i$, *а функция* $\Phi(x)$ *выпукла на* $[0,\infty)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{i=0}^n \Phi(c_i) \leqslant \sum_{i=0}^n \Phi(d_i).$$

Лемма 2 является частью более общей теоремы Г. Г. Харди, Дж. И. Литтлвуда и Г. Полиа (см. [16, теорема 108 и комментарий к ней, с. 112]).

Лемма 3. *Пусть* $f \in \Lambda BV[0,1]$ *и* $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ — *набор непересекающихся интервалов из* $(0,1)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)| \leqslant \frac{n}{\Lambda_n} V_{\Lambda,1}(f,[0,1]).$$

Доказательство. Докажем равенство

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)\left(\sum_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n-k} A_i B_{i+k} + \sum_{i=n-k+1}^{n} A_i B_{i+k-n}\right\}. \qquad (1)$$

Преобразуем обе суммы из правой части формулы (1).

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} A_i B_{i+k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} A_i B_{i+k} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=0}^{n-i} B_{i+k} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=i}^{n} B_j,$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=n-k+1}^{n} A_i B_{i+k-n} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=n-k+1}^{n} A_i B_{i+k-n} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=n-i+1}^{n-1} A_i B_{i+k-n} = \sum_{i=2}^{n} A_i \sum_{j=1}^{i-1} B_j,$$

В первом равенстве произведена замена $j=i+k$, во втором — $j=i+k-n$. Ясно, что I_1+I_2 равно левой части (1) и эта формула установлена.

Для доказательства леммы положим $A_i=\lambda_i^{-1}$, $B_k=|f(b_k)-f(a_k)|$.
Если $(a_i'(k),b_i'(k))=(a_{i+k},b_{i+k})$ при $1\leqslant i\leqslant n-k$ и $(a_i'(k),b_i'(k))=(a_{i+k-n},b_{i+k-n})$ при $n-k+1\leqslant i\leqslant n$, то из равенства (1) следует, что

$$\Lambda_n \sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)| = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{|f(b_i'(k))-f(a_i'(k))|}{\lambda_i} \leqslant nV_{\Lambda,1}(f,[0,1]),$$

откуда вытекает неравенство леммы. □

Лемма 4. *Пусть* $q\geqslant 1$ *и функция* $F(x)=\sum\limits_{i=1}^n x_i^q$ *принимает наибольшее значение* $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ *при следующих ограничениях:*

1) $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant 0$;

2) $\sum\limits_{i=1}^n x_i/\lambda_i\leqslant 1$.

Тогда существует $k\in[1,n]\cap\mathbb{Z}$ *такое, что*

$$y_1=y_2=\ldots=y_k=\Lambda_k^{-1}>y_{k+1}>\ldots>y_n=0.$$

Лемма 4 установлена Ю. Е. Куприковым [11].

Лемма 5. *Пусть выполнены все условия леммы 4, кроме $q \geqslant 1$, которое заменено на $0 < q < 1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} y_c^q = \frac{n}{\Lambda_n^q} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{\Lambda_k^q}.$$

Лемма 5 установлена М. Хормози [13].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая, положительная и вогнутая последовательность. Для $f \in V(v(n))$ и $p \in [1, +\infty)$ справедливо неравенство*

$$\tau_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant Cn^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} (v(k) - v(k-1))^p\right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$\tau_1^p\left(f, \frac{1}{n}\right)_p = \sum_{i=1}^{2n} \int\limits_{(i-1)/(2n)}^{i/(2n)} \omega^p\left(f, x, \frac{1}{n}\right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \int\limits_{(i-1)/(2n)}^{i/(2n)} \sup\left\{|f(y) - f(z)|^p : y, z \in \left[x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}\right]\right\} dx.$$

Но если $x \in \left[\frac{i-1}{2n}, \frac{i}{2n}\right]$ и $y, z \in \left[x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}\right]$, то $y, z \in \left[\frac{i-2}{2n}, \frac{i+1}{2n}\right]$. В итоге

$$\tau_1^p\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n} \sup\left\{|f(y) - f(z)|^p : y, z \in \left[\frac{i-2}{2n}, \frac{i+1}{2n}\right]\right\} dx =$$
$$= \frac{1}{2n}\left(\sum\nolimits_1 \alpha_i + \sum\nolimits_2 \alpha_i + \sum\nolimits_3 \alpha_i\right), \qquad (2)$$

где $\sum_1$ берется по $i = 1, 4, 7, \ldots, 3\,[(2n-1)/3] + 1$, $\sum_2$ берется по $i = 2, 5, 8, \ldots, 3\,[(2n-2)/3] + 2$, $\sum_3$ берется по $i = 3, 6, 9, \ldots, 3\,[2n/3]$. Ясно, что интервалы вида (t_{i-2}, t_{i+1}), где $t_i = i/(2n)$ и i входят в одну и ту же сумму $\sum_j$, не пересекаются.

Для любого $\varepsilon \in (0, v^p(1))$ найдем $a_k, b_k \in [t_{3k-1}, t_{3k+2}], 0 \leqslant k \leqslant [(2n-1)/3]$, такие, что

$$\sum\nolimits_1 \alpha_i \leqslant \sum_{k=0}^{[(2n-1)/3]} |f(a_k) - f(b_k)|^p + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как (a_k, b_k) не пересекаются, то, полагая $v(0) = 0$ и считая $n \geqslant 2$, имеем

$$\sum_{k=0}^{[(2n-1)/3]} |f(a_k) - f(b_k)| \leqslant v(n, f) \leqslant C_1 v(n) = C_1 \sum_{j=0}^{n-1} (v(j+1) - v(j)).$$

Дополняя набор $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{[(2n-1)/3]}$ вырожденными интервалами и переобозначая их так, чтобы $|f(b_k) - f(a_k)|$ убывали с ростом k, можем считать, что построена последовательность $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n-1}$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{j} |f(a_k) - f(b_k)| \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{j} (v(k+1) - v(k)), \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Применяя лемму 2, мы получаем, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(a_k) - f(b_k)|^p \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{n-1} (v(k+1) - v(k))^p,$$

т. е.

$$\sum\nolimits_1 \alpha_i \leqslant C_1^p \sum_{k=0}^{n-1} (v(k+1) - v(k))^p + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогичные оценки получаем для $\sum\nolimits_2 \alpha_i$ и $\sum\nolimits_3 \alpha_i$. Складывая их и подставляя в (2), находим, что

$$\tau_1^p \left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{3}{2n} C_1^p \sum_{k=0}^{n-1} (v(k+1) - v(k))^p + \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ последнее слагаемое в правой части (3) можно опустить. □

Следствие 1. *Для $f \in V(v(n))$ и $p \in [1, \infty)$ справедливо неравенство*

$$\tau_1(f, \delta)_p \leqslant C \delta^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{[1/\delta]+1} (v(k) - v(k-1))^p \right)^{1/p}, \quad \delta \in (0, 1).$$

Доказательство. Если $\delta \in [(n+1)^{-1}, n^{-1}], n \in \mathbb{N}$, то по пункту 1) леммы 1

$$\tau_1(f, \delta)_p \leqslant \tau_1 \left(f, \frac{2}{n+1}\right)_p \leqslant 16 \tau_1 \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_p \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n+1} (v(k) - v(k-1))^p \right)^{1/p} \leqslant C_1 \delta^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{[1/\delta]+1} (v(k) - v(k-1))^p \right)^{1/p}.$$

□

Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности, такой что $\omega(t) > 0$ при $t > 0$.

Введем пространства $H_p^\omega = \left\{ f \in L^p[0,1] : \|f\|_{H_p^\omega} = \|f\|_p + \sup \dfrac{\omega_1(f,t)_p}{\omega(t)} < \infty \right\}$ и $H_p^{\omega,\tau} = \left\{ f \in B[0,1] : \|f\|_{H_p^{\omega,\tau}} = \|f\|_p + \sup \dfrac{\tau_1(f,t)_p}{\omega(t)} < \infty \right\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *— возрастающая вогнутая положительная последовательность. Тогда вложение* $V(v(n)) \subset H_p^{\omega,\tau}$ *имеет место в том и только том случае, когда*

$$\limsup_{\delta\to 0+} \frac{\delta^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{\delta}\right]+1}(v(k)-v(k-1))^p\right)^{1/p}}{\omega(\delta)} < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность условия (4) вытекает из следствия 1. Что касается необходимости, У. Гогинава и В. Цхадая [14] установили, что если (4) не выполнено, то существует $f_0 \in V(v(n)) \setminus H_p^{\omega}$. Поскольку в силу свойства 6) леммы 1 $H_p^{\omega,\tau} \subset H_p^{\omega}$, то $f_0 \in V(v(n)) \setminus H_p^{\omega,\tau}$. □

Теорема 3. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— положительная, неубывающая последовательность такая, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1} = \infty$. *Если* $f \in \Lambda BV^{(1)}[0,1]$, *то справедлива оценка*

$$\tau\left(f, \frac{1}{n}\right)_1 \leqslant \frac{3}{2}\Lambda_n^{-1}V_{\Lambda,1}(f).$$

Доказательство. Пусть $t_i = i/(2n)$, $i \in \mathbb{Z}$. По определению имеем

$$\tau_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_1 = \sum_{i=1}^{2n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sup\left\{|f(y)-f(z)| : y,z \in \left[x-\frac{1}{2n}, x+\frac{1}{2n}\right]\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2n}\sup\{|f(y)-f(z)| : y,z \in [t_{i-2}, t_{i+1}]\} = \frac{1}{2n}\left(\sum\nolimits_1 \alpha_i + \sum\nolimits_2 \alpha_i + \sum\nolimits_3 \alpha_i\right), \tag{5}$$

где $\sum_i$ имеют такой же смысл, как в доказательстве теоремы 1. Снова отметим, что количество слагаемых в $\sum_i$ не превосходит $[(2n-1)/3]+1$, что не превосходит n при $n \geqslant 2$.

Снова находим $a_k, b_k \in [t_{3k-1}, t_{3k+2}]$ такие, что

$$\sum\nolimits_1 \alpha_i \leqslant \sum_{k=0}^{[(2n-1)/3]}|f(a_k)-f(b_k)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

и в силу леммы 3

$$\sum\nolimits_1 \alpha_i \leqslant \frac{n}{\Lambda_n}V_{\Lambda,1}(f) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Аналогичные (6) неравенства справедливы для $\sum_2 \alpha_i$ и $\sum_3 \alpha_i$. Складывая эти неравенства и подставляя их в (5), находим, что

$$\tau_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_1 \leqslant \frac{3}{2}\Lambda_n^{-1}V_{\Lambda,1}(f) + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство теоремы. □

Теорема 4. *Пусть* $p, q \in [1, \infty)$ *и* $f \in \Lambda BV^{(p)}[0,1]$. *Тогда*

$$\tau_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_q \leqslant \left(\frac{3}{2n}\right)^{1/q} V_{p,\Lambda}(f,[0,1]) \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{\Lambda_k^{q/p}}\right)^{1/q} \qquad \textit{при} \qquad \frac{q}{p} \geqslant 1,$$

$$\tau_1\left(f, \frac{1}{n}\right)_q \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{1/q} \frac{V_{p,\Lambda}(f,[0,1])}{\Lambda_n^{1/p}} \qquad \textit{при} \qquad \frac{q}{p} < 1.$$

Доказательство. Пусть снова $t_i = i/(2n)$, $i \in \mathbb{Z}$. По определению

$$\tau_1^q\left(f, \frac{1}{n}\right)_q = \sum_{i=1}^{2n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \omega^q\left(f, x, \frac{1}{n}\right) dx \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n} \sup\{|f(y)-f(z)|^q : y, z \in [t_{i-2}, t_{i+1}]\} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\sum\nolimits_1 \alpha_i + \sum\nolimits_2 \alpha_i + \sum\nolimits_3 \alpha_i\right), \tag{7}$$

где $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ — такие же, как в доказательстве теоремы 1.

Снова оцениваем $\sum_1 \alpha_i$ через $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(a_k) - f(b_k)|^q + \dfrac{\varepsilon}{3}$, где (a_k, b_k) попарно не пересекаются и некоторые $f(a_k) - f(b_k)$ могут равняться нулю.

Пусть теперь $x_k = |f(a'_k) - f(b'_k)|^q$, где $\{(a'_k, b'_k)\}_{k=1}^n$ — перестановка (a_k, b_k) такая, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k/\lambda_k \leqslant V_{p,\Lambda}^p(f,[0,1]) = A$. Если $A = 0$, то утверждение теоремы очевидно, иначе в силу леммы 4 при $q/p \geqslant 1$ имеем

$$\sum\nolimits_1 \alpha_i \leqslant \sum_{k=0}^{n} x_k^{q/p} + \frac{\varepsilon}{3} = A^{q/p} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{A}\right)^{q/p} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant V_{p,\Lambda}^q(f,[0,1]) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{\Lambda_k^{\frac{q}{p}}} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогичные неравенства справедливы для $\sum_2 \alpha_i$ и $\sum_3 \alpha_i$. Подставляя их в (7), получаем

$$\tau_1^q\left(f, \frac{1}{n}\right)_q \leqslant \frac{3}{2n} V_{p,\Lambda}^q(f,[0,1]) \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{\Lambda_k^{\frac{q}{p}}} + \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{8}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ последнее слагаемое правой части (8) можно опустить. При $q/p < 1$ по лемме 5 неравенство (8) превращается в следующее:

$$\tau_1^q\left(f, \frac{1}{n}\right)_q \leqslant \frac{3}{2} \frac{V_{p,\Lambda}^q(f,[0,1])}{\Lambda_n^{\frac{q}{p}}}. \tag{9}$$

При $q = p = 1$ аналогичный результат получен другим способом в теореме 3. □

Теорема 5. *Пусть* $p, q \geqslant 1$, $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *возрастающая последовательность положительных чисел такая, что* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} = \infty$, $\omega(t)$ — *модуль непрерывности такой, что* $\omega(t) > 0$ *при* $t > 0$. *Тогда вложение* $\Lambda BV^{(p)}[0,1] \subset H_q^{\omega,\tau}$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\omega(1/n) n^{1/q}} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\frac{k}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{q}} \right\} < \infty. \tag{10}$$

Доказательство. В силу теоремы 4 из выполнения (10) следует, что $\tau_1(f,1/n) \leqslant \leqslant C_1\omega(1/n)$. В силу утверждения 1) леммы отсюда вытекает, что $\tau_1(f,\delta) \leqslant C_2\omega(\delta)$ для всех $\delta \in [0,1]$ (см. доказательство следствия 1). Если условие (10) не выполнено, то согласно результату М. Хормози [13] существует функция $f_0 \in \Lambda BV^{(p)}[0,1]$, которая не принадлежит H_q^{ω}. Но в силу части 6) леммы 1 верно вложение $H_q^{\omega,\tau} \subset H_q^{\omega}$. Поэтому $f_0 \notin H_q^{\omega,\tau}$ и необходимость условия (10) для вложения установлена. $\square$

Рассмотрим некоторые приложения оценок усредненных модулей непрерывности из теорем 1 и 4.

Напомним, что формула прямоугольников в численном интегрировании выглядит так:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) + R_n^0(f),$$

где $R_n^0(f)$ — погрешность формулы.

Если $x_i = i/n$, то формулы трапеций и Симпсона записываются следующим образом:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2n}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(1)\right) + R_n^1(f),$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6n}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + f(1)\right) + R_n^2(f).$$

В главе 3 монографии Б. Сендова и В. Попова [15] была получена следующая теорема.

Теорема А. *Пусть f определена, измерима и ограничена на $[0,1]$. Тогда*

$$\left|R_n^0(f)\right| \leqslant \frac{1}{2}\tau_2\left(f,\frac{1}{2n}\right)_1, \qquad \left|R_n^1(f)\right| \leqslant \tau_2\left(f,\frac{1}{n}\right)_1, \qquad \left|R_n^2(f)\right| \leqslant C\tau_4\left(f,\frac{1}{2n}\right)_1.$$

Следствие 2. *Пусть $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая вогнутая положительная последовательность. Тогда для $f \in V(v(n))$ справедливы оценки*

$$\left|R_n^0(f)\right| \leqslant Cn^{-1}v(n), \quad \left|R_n^1(f)\right| \leqslant Cn^{-1}v(n), \quad \left|R_n^2(f)\right| \leqslant Cn^{-1}v(n).$$

Доказательство. В силу оценки теоремы 1 имеем $\tau_1(f,1/n) \leqslant C_1 n^{-1}v(n)$. В то же время в силу пункта 3) леммы 1 имеем $\tau_2(f,1/(2n))_1 \leqslant 2\tau_1(f,1/n)_1$. Поэтому

$$|R_n^0(f)| \leqslant \tau_1\left(f,\frac{1}{n}\right) \leqslant C_1 n^{-1}v(n).$$

Для R_n^1 в силу пунктов 1) и 3) леммы 1 и теоремы А имеем

$$|R_n^1(f)| \leqslant \tau_2\left(f,\frac{1}{n}\right) \leqslant 2\tau_1\left(f,\frac{2}{n}\right) \leqslant 32\tau_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_1 \leqslant 32C_1 n^{-1}v(n).$$

Для R_n^2 получаем с помощью леммы 1 и теоремы А

$$|R_n^2(f)| \leqslant {}_2\tau_4\left(f,\frac{1}{2n}\right)_1 \leqslant 2_2\tau_3\left(f,\frac{4}{6n}\right)_1 \leqslant 2^2C_2\tau_2\left(f,\frac{1}{n}\right)_1 \leqslant 2^3C_2\tau_1\left(f,\frac{2}{n}\right)_1 \leqslant$$
$$\leqslant 8\cdot 4^2 C_2\tau_1\left(f,\frac{1}{n}\right)_1 \leqslant 2^7 C_2 C_1 n^{-1}v(n).$$
$\square$

Следствие 3. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, *последовательность* Λ *такая, как в теореме 3,* $f(x)$ *дифференцируема всюду на* $[0,1]$, *причем* $f' \in \Lambda BV^{(p)}[0,1]$. *Тогда для* f *справедливы оценки*

$$\left|R_n^0(f)\right| \leqslant Cn^{-1}\Lambda_n^{-1/p}, \quad \left|R_n^1(f)\right| \leqslant Cn^{-1}\Lambda_n^{-1/p}, \quad \left|R_n^2(f)\right| \leqslant Cn^{-1}\Lambda_n^{-1/p}.$$

Доказательство. В силу свойств 4) и 1) из леммы 1 имеем

$$\tau_2(f,1/n)_1 \leqslant n^{-1}\tau_1(f',2/n)_1 \leqslant 16n^{-1}\tau_1(f',1/n)_1 \leqslant C_1 n^{-1}\Lambda_n^{-1/p}.$$

Подставляя эту оценку в два первых неравенства теоремы А, получаем утверждения для $R_n^0(f)$ и $R_n^1(f)$. С помощью леммы 1 получаем также

$$\tau_4(f,1/(2n))_1 \leqslant 4\tau_2(f,1/n)_1 \leqslant 4n^{-1}\tau_1(f',2/n)_1 \leqslant 4C_1 n^{-1}\Lambda_n^{-1/p},$$

откуда следует оценка для $R_n^2(f)$. □

Библиографический список

1. *Jordan C.* Sur la Serie de Fourier // C. R. Acad. Sci. Paris. 1981. Vol. 92. P. 228–230.
2. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. and Phys. 1924. Vol. 3. P. 72–94.
3. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals (I) // Math. Zeitschr. 1928. Vol. 28. P. 565–606.
4. *Young L. C.* An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration // Acta Math. 1936. Vol. 67. P. 251–282.
5. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Матем. 1965. № 2. С. 171–187.
6. *Терехин А. П.* Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 289–300.
7. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia math. 1972. Vol. 44, № 2. P. 107–117.
8. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia math. 1976. Vol. 55, № 1. P. 87–95.
9. *Shiba M.* On absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$ // Sci. Rep. Fukushima Univ. 1980. Vol. 30. P. 7–10.
10. *Чантурия З. А.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 2. С. 185–193.
11. *Куприков Ю. Е.* О модулях непрерывности функций из классов Ватермана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 5. С. 59–62.
12. *Li Z., Wang H.* Estimates of L^p- continuity modulus of ΛBV series and applications in Fourier series // Applicable Anal. 2011. Vol. 90, № 3–4. P. 475–482.
13. *Hormozi M.* Inclusion of $\Lambda BV^{(p)}$ spaces in the classes H_ω^q // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 404, № 1. P. 195–200.
14. *Goginava U., Tskhadaia V.* On the embedding $V[v(n)] \subset H_p^\omega$ // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2004. Vol. 136. P. 47–54.
15. *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости. М. : Мир, 1988. 328 с.
16. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

Образец для цитирования:

Волосивец С. С., Вежлев А. Е. Вложения пространств функций обобщенной ограниченной вариации в пространства функций с заданной мажорантой усредненного модуля непрерывности // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 255–266. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-255-266.

Embeddings of Generalized Bounded Variation Function Spaces into Spaces of Functions with Given Majorant of Average Modulus of Continuity

S. S. Volosivets[1], **A. E. Vezhlev**[2]

[1]Sergey S. Volosivets, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Arseny E. Vezhlev, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, avezhlev@yandex.ru

In the present paper we study embeddings of some spaces of functions of generalized bounded variation into classes of functions with given majorant of average modulus of continuity introduced by B. Sendov and V. Popov. We consider the spaces $\Lambda BV^{(p)}$ of functions of bounded $(\Lambda - p)$-variation suggested by D. Waterman (for $p = 1$) and M. Shiba (for $p > 1$) and spaces $V(v(n))$ of functions with given majorant of its modulus of variation. The last quantity was introduced by Z. A. Chanturia. The necessary and sufficient conditions of such embeddings are proved. Earlier similar embeddings into classes with given majorant of usual integral modulus of continuity were studied by Yu. E. Kuprikov, U. Goginava and V. Tskhadaia, M. Hormozi et al. Applications of obtained results to estimates of errors for some quadrature rules are given.

Key words: average modulus of continuity, $\Lambda BV^{(p)}$ space, modulus of variation, embedding, quadrature rule.

References

1. Jordan C. Sur la Serie de Fourier. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1981, vol. 92, pp. 228–230.
2. Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *J. Math. and Phys.*, 1924, vol. 3, pp. 72–94.
3. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some properties of fractional integrals (I). *Math. Zeitschr.*, 1928, vol. 28, pp. 565–606.
4. Young L. C. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.*, 1936, vol. 67, pp. 251–282.
5. Terekhin A. P. Priblizhenie funkcii ogranichennoi p-variacii [Approximation of functions of bounded p-variation]. *Izvestiya vyssh. ucheb. zaved. Matematika*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
6. Terekhin A. P. Integral smoothness properties of periodic functions of bounded p-variation. *Math. Notes*, 1967, vol. 2, no. 3, pp. 659–665.
7. Waterman D. On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation. *Studia Math.*, 1972, vol. 44, no. 2, pp. 107–117.
8. Waterman D. On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation. *Studia math.*, 1976, vol. 55, no. 1, pp. 87–95.
9. Shiba M. On absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$. *Sci. Rep. Fukushima Univ.*, 1980, vol. 30, pp. 7–10.
10. *Chaturia Z. A.* Absolute convergence of Fourier series. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 2, pp. 695–703.
11. Kuprikov Yu. E. O modulyah nepreryvnosti funkcii iz klassov Watermana [On moduli of continuity of functions from Waterman classes]. *Vestnik Mosk. univ. Ser. 1. Math., mech.*, 1997, no. 5, pp. 59–62 (in Russian).

12. Li Z., Wang H. Estimates of L^p- continuity modulus of ΛBV series and applications in Fourier series. *Applicable Anal.*, 2011, vol. 90, no. 3–4, pp. 475–482.
13. Hormozi M. Inclusion of $\Lambda BV^{(p)}$ spaces in the classes H^q_ω. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 404, no. 1, pp. 195–200.
14. Goginava U., Tskhadaia V. On the embedding $V[v(n)] \subset H^\omega_p$. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2004, vol. 136, pp. 47–54.
15. Sendov B., Popov V. *Usrednennye moduli gladkosti* [Average moduli of smoothness]. Moscow, Mir, 1988. 328 p (in Russian).
16. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p.

Cite this article as:
Volosivets S. S., Vezhlev A. E. Embeddings of Generalized Bounded Variation Function Spaces into Spaces of Functions with Given Majorant of Average Modulus of Continuity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 255–266 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-255-266.