

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия: Математика, Механика, Информатика

2022

Том 22

Выпуск 1



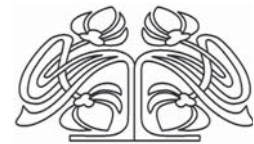
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962, «Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2022 Том 22

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the two-dimensional Broadwell system [Духновский С. А. Новые точные решения для двумерной системы Бродуэлла] 4

Клячин А. А., Клячин В. А. Теоремы единственности восстановления прообраза при вырожденных преобразованиях 15

Рацеев С. М., Череватенко О. И. Об алгоритмах декодирования кодов Гоппы на случай ошибок и стираний 28

Механика

Джабраилов А. Ш., Николаев А. П., Клочков Ю. В., Гуреева Н. А., Ищанов Т. Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений 48

Иванов Д. В. Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности 62

Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газовой смеси 90

Информатика

Romanov A. I., Batraeva I. A. Attention based collaborative filtering [Романов А. И., Батраева И. А. Коллаборативная фильтрация с механизмом внимания] 103

Сперанский Д. В. О задаче обращения выходов нечетких дискретных систем 112

Khokhlova O. A., Khokhlova A. N. Analysis of technological trends to identify skills that will be in demand in the labor market with open-source data using machine learning methods [Хохлова О. А., Хохлова А. Н. Анализ технологических трендов для выявления востребованных в будущем навыков на рынке труда по данным из открытого источника с использованием методов машинного обучения] 123

Chernyshova G. Yu., Rasskazkin N. D. Software implementation of ensemble models for the analysis of regional socio-economic development indicators [Чернышова Г. Ю., Рассказкин Н. Д. Разработка приложения для реализации ансамблевых моделей в задаче анализа социально-экономических показателей] 130

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.02; 01.01.06; 01.01.09; 01.02.06; 01.02.08; 1.1.1; 1.1.6; 1.1.8; 1.1.9; 1.2.2 (физ.-мат. и техн. науки); 2.3.1 (физ.-мат. и техн. науки).

Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в Интернет-каталогах «Пресса России» (www.ppressa-ru.ru), «Пресса по подписке» (www.akc.ru) и ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная.

Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист

Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.03.22.

Подписано в свет 31.03.22.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 16,05 (17,25).

Тираж 70 экз. Заказ 8-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.

Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2022



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редакцией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редакцией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редакция принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редакции высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the two-dimensional Broadwell system 4

Klyachin A. A., Klyachin V. A. Uniqueness theorems for recovering the inverse image under degenerate transformations 15

Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. Decoding algorithms for Goppa codes with errors and erasures 28

Mechanics

Dzhabrailov A. Sh., Nikolaev A. P., Klochkov Yu. V., Gureeva N. A., Ishanov T. R. Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on FEM with different variants of definitional equations 48

Ivanov D. V. Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria 62

Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension 90

Computer Sciences

Romanov A. I., Batraeva I. A. Attention based collaborative filtering 103

Speranskiy D. V. Reversion of outputs of fuzzy discrete systems 112

Khokhlova O. A., Khokhlova A. N. Analysis of technological trends to identify skills that will be in demand in the labor market with open-source data using machine learning methods 123

Chernyshova G. Yu., Rasskazkin N. D. Software implementation of ensemble models for the analysis of regional socio-economic development indicators 130



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Фёдорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, доцент (Москва, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Av gust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,
Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

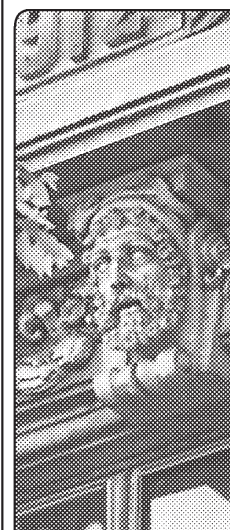
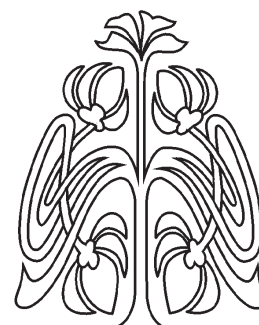
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

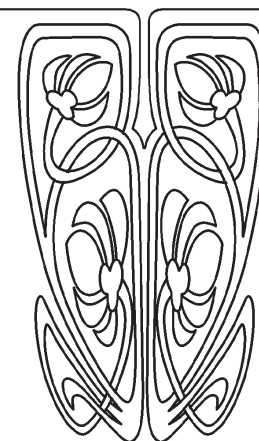
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 4–14
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 4–14

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-4-14>

Article

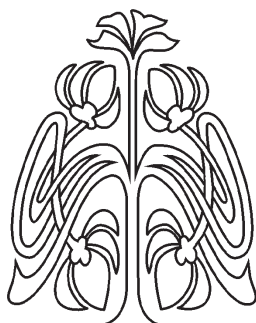
New exact solutions for the two-dimensional Broadwell system

S. A. Dukhnovsky

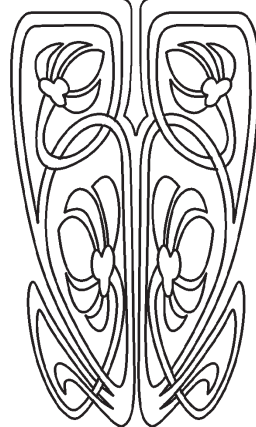
Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow 129337, Russia

Sergey A. Dukhnovsky, sergeidukhnovskijj@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9643-7394>

Abstract. In this paper, we consider the discrete kinetic Broadwell system. This system is a nonlinear hyperbolic system of partial differential equations. The two-dimensional Broadwell system is the kinetic Boltzmann equation, and for this model momentum and energy are conserved. In the kinetic theory of gases, the system describes the motion of particles moving on a two-dimensional plane, the right-hand side is responsible for pair collisions of particles. For the first time, new traveling wave solutions are found using the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method. This method is as follows. The solution is sought in the form of a traveling wave. In this case, the system is reduced to a system of ordinary differential equations. Further, the solution is sought according to this method in the form of an exponential polynomial, depending on an unknown function that satisfies a certain differential equation. Solutions of the differential equation themselves are known. The summation is carried out up to a certain positive number, which is determined by the balance between the highest linear and non-linear terms. Further, the proposed solution is substituted into the system of differential equations and coefficients at the same exponential powers are collected. Solving systems of algebraic equations, we find unknown coefficients and write the original solution. This method is universal and allows us to obtain a large number of solutions, namely, kink solutions, singular kink solutions, periodic solutions, and rational solutions. Corresponding graphs of some solutions are presented by the Mathematica package. With the help of computerized symbolic computation, we obtain new solutions. Similarly, it is possible to find exact solutions for other kinetic models.



Научный
отдел





Keywords: two-dimensional Broadwell system, traveling wave solutions, analytical method, kinetic Boltzmann equation, Knudsen parameter

For citation: Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the two-dimensional Broadwell system. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 4–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-4-14>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.951

Новые точные решения для двумерной системы Бродуэлла

С. А. Духновский

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, ул. Ярославское шоссе, д. 26

Духновский Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры прикладной математики, sergeidukhnvskijj@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9643-7394>

Аннотация. В статье рассмотрена дискретная кинетическая система Бродуэлла. Данная система является нелинейной гиперболической системой уравнений в частных производных. Двумерная система Бродуэлла представляет собой кинетическое уравнение Больцмана, и для этой модели импульс и энергия сохраняются. В кинетической теории газов система описывает движение частиц на двумерной плоскости, при этом правая часть системы отвечает за парные столкновения частиц. Впервые новые решения бегущей волны найдены с использованием метода $\exp(-\varphi(\xi))$ -разложения. Данный метод состоит в следующем. Решение ищется в виде бегущей волны. В этом случае система сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее решение ищется согласно данному методу в виде полинома по экспонентам (сумма ряда), зависящего от неизвестной функции, которая удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению. При этом известны сами решения дифференциального уравнения. Суммирование ведется до конкретного положительного числа, которое определяется посредством баланса между наивысшими линейными и нелинейными членами. Далее предполагаемое решение подставляется в систему дифференциальных уравнений и собираются коэффициенты при одинаковых степенях экспонент. Решая системы алгебраических уравнений, мы находим неизвестные коэффициенты и записываем исходное решение. Данный метод является универсальным и позволяет получить большое число решений, а именно кинковые, сингулярные кинковые, периодические и рациональные решения. Соответствующие графики некоторых решений представлены посредством пакета «Математика». С помощью компьютерных символьных вычислений получены новые решения. Аналогичным образом можно найти точные решения для других кинетических моделей.

Ключевые слова: двумерная система Бродуэлла, решения бегущей волны, аналитический метод, кинетическое уравнение Больцмана, параметр Кнудсена

Для цитирования: *Dukhnovsky S. A. New exact solutions for the two-dimensional Broadwell system [Духновский С. А. Новые точные решения для двумерной системы Бродуэлла] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 4–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-4-14>*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Introduction

Consider the two-dimensional Broadwell system [1, 2]:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= \frac{1}{\varepsilon}(wz - uv), \\ \partial_t v - \partial_x v &= \frac{1}{\varepsilon}(wz - uv), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t w + \partial_y w &= \frac{1}{\varepsilon}(uv - wz), \\ \partial_t z - \partial_y z &= \frac{1}{\varepsilon}(uv - wz). \end{aligned} \tag{1}$$

Here $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$, $z = z(x, y, t)$ are the densities of four groups of particles with velocities $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, ε is the Knudsen parameter from the kinetic theory of gases. This system describes a rarefied gas consisting of four groups of particles. The interaction is as follows. The Broadwell system describes particles of four groups, namely, the first group of particles moves at a unit speed along with the axis Ox, and the second group moves at a unit speed in the opposite direction. The third and fourth groups move in a similar way. Particles of the first and second groups colliding cause a reaction that transfers into particles of the third and fourth groups. In turn, particles of the third and fourth groups transfer into particles of the first and second groups.

There are many methods for finding exact solutions such as the sine-cosine [3, 4], the $\exp(-\varphi(\xi))$ -function method [5], the G'/G -expansion method [6], the generalized G'/G -expansion method [7], the homogeneous balance method [8, 9], the Riccati–Bernoulli sub-ODE method [10, 11], the Jacobi elliptic function expansion method [12], the Exp-function method [13, 14], the Kudryashov method [15], the first integral method [16] and others. The Broadwell system is a non-integrable system, i.e. the Painlevé test is not applicable. In [17], exact solutions of the Carleman system with conformable derivative were obtained via the generalized Bernoulli sub-ODE method. In [18, 19], the authors found solutions of kinetic systems using the Bateman equation. Asymptotic stability of equilibrium states for the Carleman and Godunov–Sultangazin systems was proved in [20, 21]. We, for the first time, will get solutions using the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method.

1. Description of the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method

Consider a given nonlinear equation

$$E(u, u_t, u_x, u_y, u_{xt}, u_{xy}, \dots) = 0, \tag{2}$$

where $u = u(x, y, t)$ is an unknown function. We will look for a traveling wave solution $\xi = kx + ly + ct$, $u = U(\xi)$. Then (2) is reduced to the ordinary differential equation:

$$E(U, cU', kU', lU', klU'', klU'', \dots) = 0. \tag{3}$$



According to the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method, a solution is sought in the form

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \exp(-i\varphi(\xi)), \quad (4)$$

where $a_N \neq 0$ and $\varphi(\xi)$ satisfies the ODE in the following form

$$\varphi'(\xi) = \mu \exp(\varphi(\xi)) + \exp(-\varphi(\xi)) + \lambda. \quad (5)$$

The solutions of Eq. (5) have the following form:

1) when $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$:

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + C) \right) - \lambda}{2\mu} \right), \quad (6)$$

and

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \coth \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + C) \right) - \lambda}{2\mu} \right); \quad (7)$$

2) when $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$:

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + C) \right) - \lambda}{2\mu} \right), \quad (8)$$

and

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \cot \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + C) \right) - \lambda}{2\mu} \right); \quad (9)$$

3) when $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$:

$$\varphi(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + C)) - 1} \right); \quad (10)$$

4) when $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu = 0$:

$$\varphi(\xi) = \ln \left(-\frac{2(\lambda(\xi + C) + 2)}{\lambda^2(\xi + C)} \right); \quad (11)$$

5) when $\mu = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda^2 - 4\mu = 0$:

$$\varphi(\xi) = \ln(\xi + C), \quad (12)$$

where C is an integrating constant.



The positive integer N is determined by a balance between the linear term of the highest order and the highest order nonlinear term. Substituting (4) into (3) and equating coefficients at $\exp(-i\varphi(\xi))$, $i = 0, 1, 2, \dots$, to zero, we obtain a system of algebraic equations. Then we find the unknown coefficients and write our solutions.

2. Application of the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method

We use the transformation

$$u = U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad w = W(\xi), \quad z = Z(\xi), \quad \xi = kx + ly + ct.$$

Then the system has the form

$$\begin{aligned} U'(c+k) &= \frac{1}{\varepsilon}(WZ - UV), \\ V'(c-k) &= \frac{1}{\varepsilon}(WZ - UV), \\ W'(c+l) &= \frac{1}{\varepsilon}(UV - WZ), \\ Z'(c-l) &= \frac{1}{\varepsilon}(UV - WZ). \end{aligned} \tag{13}$$

We apply the following expansions by the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \sum_{i=0}^N a_i \exp(-i\varphi(\xi)), & V(\xi) &= \sum_{i=0}^M b_i \exp(-i\varphi(\xi)), \\ W(\xi) &= \sum_{i=0}^P c_i \exp(-i\varphi(\xi)), & Z(\xi) &= \sum_{i=0}^L d_i \exp(-i\varphi(\xi)), \end{aligned} \tag{14}$$

where N, M, P, L are positive integers.

Balancing between U' and UV yields $M = 1$. Similarly, we have

$$M + 1 = N + M, \quad P + 1 = P + L, \quad L + 1 = P + L,$$

so that $N = P = L = 1$. Then we seek the solution of (13) in the form

$$\begin{aligned} U &= a_0 + a_1 \exp(-\phi(\xi)), & V &= b_0 + b_1 \exp(-\phi(\xi)), \\ W &= c_0 + c_1 \exp(-\phi(\xi)), & Z &= d_0 + d_1 \exp(-\phi(\xi)). \end{aligned} \tag{15}$$

Substituting (15) into (13) and collecting coefficients of the order of $\exp(-i\varphi(\xi))$, $i = 0, 1, 2, \dots$, we have

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_0}{\varepsilon} + \frac{a_0 b_1}{\varepsilon} - \frac{c_1 d_0}{\varepsilon} - \frac{c_0 d_1}{\varepsilon} - c\lambda a_1 - k\lambda a_1 &= 0, \\ \frac{a_1 b_1}{\varepsilon} - \frac{c_1 d_1}{\varepsilon} - ca_1 - ka_1 &= 0, \\ \frac{a_0 b_0}{\varepsilon} - \frac{c_0 d_0}{\varepsilon} - c\mu a_1 - k\mu a_1 &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$



and

$$\begin{aligned}\frac{a_1 b_0}{\varepsilon} + \frac{a_0 b_1}{\varepsilon} - \frac{c_1 d_0}{\varepsilon} - \frac{c_0 d_1}{\varepsilon} - c \lambda b_1 + k \lambda b_1 &= 0, \\ \frac{a_1 b_1}{\varepsilon} - \frac{c_1 d_1}{\varepsilon} - c b_1 + k b_1 &= 0, \\ \frac{a_0 b_0}{\varepsilon} - \frac{c_0 d_0}{\varepsilon} - c \mu b_1 + k \mu b_1 &= 0,\end{aligned}\tag{17}$$

and

$$\begin{aligned}-\frac{a_1 b_0}{\varepsilon} - \frac{a_0 b_1}{\varepsilon} + \frac{c_1 d_0}{\varepsilon} + \frac{c_0 d_1}{\varepsilon} - c \lambda c_1 - l \lambda c_1 &= 0, \\ -\frac{a_1 b_1}{\varepsilon} + \frac{c_1 d_1}{\varepsilon} - c c_1 - l c_1 &= 0, \\ -\frac{a_0 b_0}{\varepsilon} + \frac{c_0 d_0}{\varepsilon} - c \mu c_1 - l \mu c_1 &= 0,\end{aligned}\tag{18}$$

and

$$\begin{aligned}-\frac{a_1 b_0}{\varepsilon} - \frac{a_0 b_1}{\varepsilon} + \frac{c_1 d_0}{\varepsilon} + \frac{c_0 d_1}{\varepsilon} - c \lambda d_1 + l \lambda d_1 &= 0, \\ -\frac{a_1 b_1}{\varepsilon} + \frac{c_1 d_1}{\varepsilon} - c d_1 + l d_1 &= 0, \\ -\frac{a_0 b_0}{\varepsilon} + \frac{c_0 d_0}{\varepsilon} - c \mu d_1 + l \mu d_1 &= 0.\end{aligned}\tag{19}$$

Solving together (16)–(19) by the Mathematica package, we obtain

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{b_0(c^2 - k^2) \left(c(c_0 + d_0) + (c_0 - d_0)l \right) (k^2 - l^2) + b_0^2(c - k)(c^2 - l^2)(k^2 - l^2)}{b_0(c^2 - k^2)(c^2 - l^2)(k^2 - l^2)\varepsilon} + \\ &+ \frac{(c + k)(c^2 - l^2) \left(c_0 d_0(k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu \right)}{b_0(c^2 - k^2)(c^2 - l^2)(k^2 - l^2)\varepsilon}, \\ a_0 &= \frac{c_0 d_0(k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0(k^2 - l^2)}, \\ a_1 &= \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2}, \quad d_1 = -\frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2}, \\ c_1 &= -\frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2}, \quad b_1 = \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2}, \\ b_0 &= b_0, \quad c_0 = c_0, \quad d_0 = d_0.\end{aligned}$$

The exact solutions of the system (1) are:

1) when $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$,

$$u_1(\xi) = \frac{c_0 d_0 (k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0 (k^2 - l^2)} - \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + C)\right) + \lambda} \right), \quad (20)$$

$$v_1(\xi) = b_0 - \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + C)\right) + \lambda} \right), \quad (21)$$

$$w_1(\xi) = c_0 + \frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + C)\right) + \lambda} \right), \quad (22)$$

$$z_1(\xi) = d_0 + \frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + C)\right) + \lambda} \right), \quad (23)$$

where $\xi = kx + ly + ct$ and C is an arbitrary constant;

2) when $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$,

$$u_2(\xi) = \frac{c_0 d_0 (k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0 (k^2 - l^2)} + \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda} \right), \quad (24)$$

$$v_2(\xi) = b_0 + \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda} \right), \quad (25)$$

$$w_2(\xi) = c_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda} \right), \quad (26)$$

$$z_2(\xi) = d_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{2\mu}{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}(\xi + C)\right) - \lambda} \right), \quad (27)$$

where $\xi = kx + ly + ct$ and C is an arbitrary constant;

3) when $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$,

$$u_3(\xi) = \frac{c_0 d_0 (k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0 (k^2 - l^2)} + \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + C)) - 1} \right), \quad (28)$$

$$v_3(\xi) = b_0 + \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + C)) - 1} \right), \quad (29)$$

$$w_3(\xi) = c_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + C)) - 1} \right), \quad (30)$$

$$z_4(\xi) = d_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + C)) - 1} \right), \quad (31)$$

where $\xi = kx + ly + ct$ and C is an arbitrary constant;



4) when $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0,$

$$u_4(\xi) = \frac{c_0 d_0 (k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0 (k^2 - l^2)} - \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda^2 (\xi + C)}{2(\lambda(\xi + C) + 2)} \right), \quad (32)$$

$$v_4(\xi) = b_0 - \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda^2 (\xi + C)}{2(\lambda(\xi + C) + 2)} \right), \quad (33)$$

$$w_4(\xi) = c_0 + \frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda^2 (\xi + C)}{2(\lambda(\xi + C) + 2)} \right), \quad (34)$$

$$z_4(\xi) = d_0 + \frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{\lambda^2 (\xi + C)}{2(\lambda(\xi + C) + 2)} \right), \quad (35)$$

where $\xi = kx + ly + ct$ and C is an arbitrary constant;

5) when $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0,$

$$u_5(\xi) = \frac{c_0 d_0 (k^2 - l^2) + (c^2 - k^2)(c^2 - l^2)\varepsilon^2 \mu}{b_0 (k^2 - l^2)} + \frac{(c - k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{1}{\xi + C} \right), \quad (36)$$

$$v_5(\xi) = b_0 + \frac{(c + k)(c^2 - l^2)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{1}{\xi + C} \right), \quad (37)$$

$$w_5(\xi) = c_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c - l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{1}{\xi + C} \right), \quad (38)$$

$$z_5(\xi) = d_0 - \frac{(c^2 - k^2)(c + l)\varepsilon}{k^2 - l^2} \left(\frac{1}{\xi + C} \right), \quad (39)$$

where $\xi = kx + ly + ct$ and C is an arbitrary constant.

3. Graphs of the obtained solutions

Here we will plot some graphs of the obtained solutions. Equation (20) represents the kink wave. Figure 1 shows the exact 3D kink-type solution of equation (20) for $b_0 = 1, \varepsilon = 1, c = 1, k = 2, l = 3, c_0 = 1, d_0 = 1, \mu = 1, C = 1$ and $-10 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 10$.

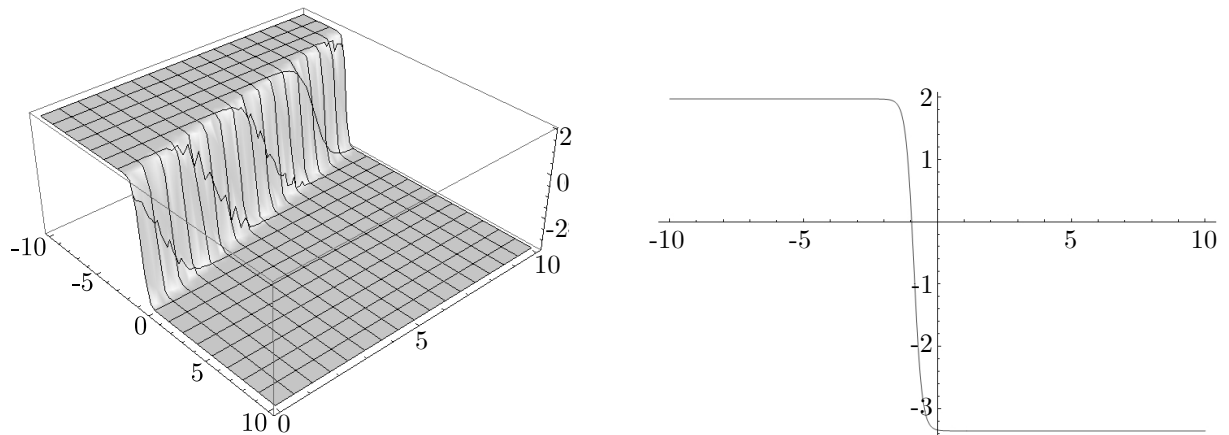


Fig. 1. Kink solution of $u_1(\xi)$ for $b_0 = 1, \varepsilon = 1, c = 1, k = 2, l = 3, c_0 = 1, d_0 = 1, \mu = 1, C = 1$. The left figure shows the 3-D plot and the right figure shows the 2-D plot for $t = 0$



Equation (24) represents the periodic traveling wave solution. Figure 2 shows the exact 3D periodic solution of equation (24) for $b_0 = 3$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $c_0 = 2$, $d_0 = 1$, $\mu = 1$, $C = 1$ and $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$.

Equation (28) represents the singular kink solution. Figure 3 shows the exact 3D singular kink solution of equation (28) for $b_0 = -1$, $\varepsilon = 1$, $c = -1$, $k = 3$, $l = 2$, $c_0 = 3$, $d_0 = 1$, $\mu = 0$, $C = 1$ and $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$.

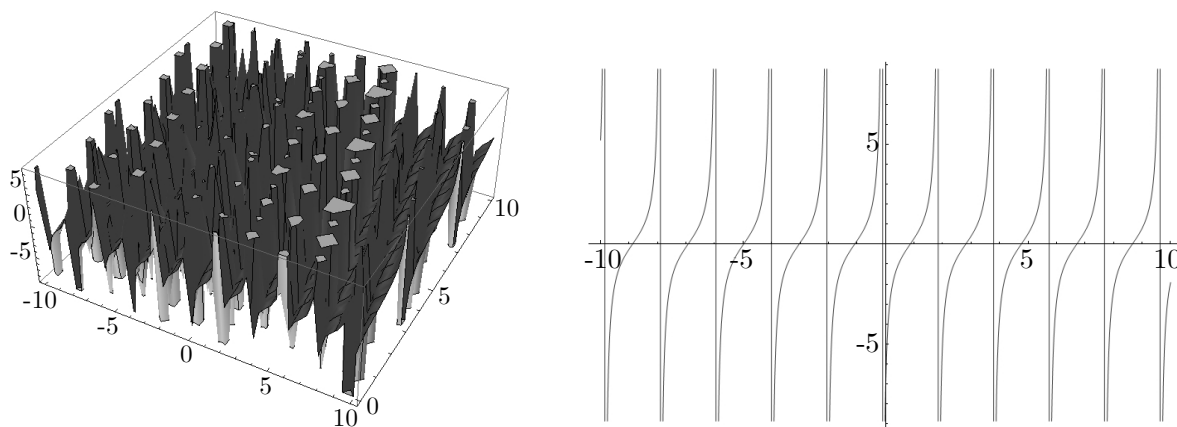


Fig. 2. Periodic wave solution of $u_2(\xi)$ for $b_0 = 3$, $\varepsilon = 1$, $c = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $c_0 = 2$, $d_0 = 1$, $\mu = 1$, $C = 1$. The left figure shows the 3-D plot and the right figure shows the 2-D plot for $t = 0$

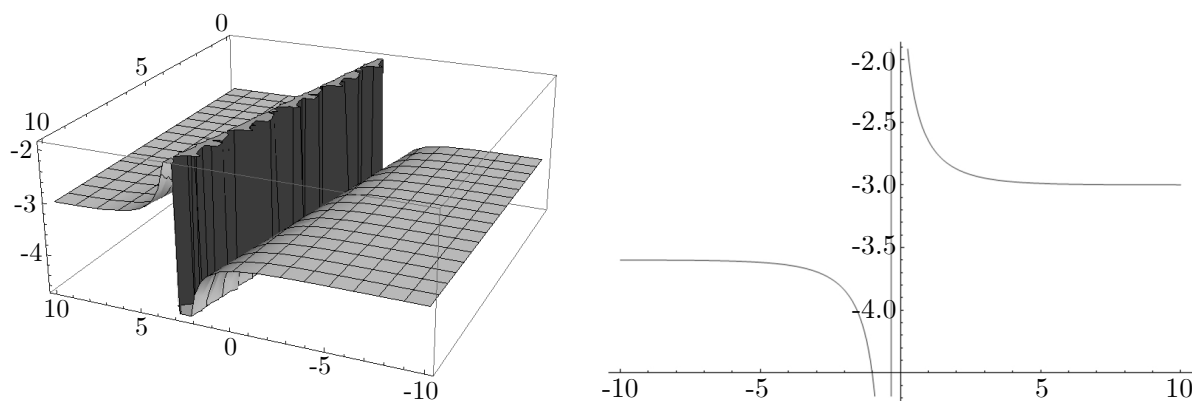


Fig. 3. Singular kink solution of $u_3(\xi)$ for $b_0 = -1$, $\varepsilon = 1$, $c = -1$, $k = 3$, $l = 2$, $c_0 = 3$, $d_0 = 1$, $\mu = 0$, $C = 1$. The left figure shows the 3-D plot and the right figure shows the 2-D plot for $t = 0$

Conclusion

In this work, we have found the exact traveling wave solutions of the kinetic Broadwell system by using the $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method. All of the above solutions have been verified using the Mathematica package. In the future, the solutions of the remaining kinetic models will be found.

References

1. Radkevich E. V. On the large-time behavior of solutions to the Cauchy problem for a 2-dimensional discrete kinetic equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 202, no. 5, pp. 735–768. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2074-x>



2. Godunov S. K., Sultangazin U. M. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation. *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. <https://doi.org/10.1070/RM1971v026n03ABEH003822>
3. Wazwaz A. M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, vol. 40, iss. 5–6, pp. 499–508. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2003.12.010>
4. Wazwaz A. M. The tanh and the sine-cosine methods for the complex modified KdV and the generalized KdV equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2005, vol. 49, iss. 7–8, pp. 1101–1112. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.08.013>
5. Alam M. N., Alam M. M. An analytical method for solving exact solutions of a nonlinear evolution equation describing the dynamics of ionic currents along microtubules. *Journal of Taibah University for Science*, 2017, vol. 11, iss. 6, pp. 939–948. <https://doi.org/10.1016/j.jtusci.2016.11.004>
6. Jafari H., Kadhoda N., Biswas A. The G'/G -expansion method for solutions of evolution equations from isothermal magnetostatic atmospheres. *Journal of King Saud University – Science*, 2013, vol. 25, iss. 1, pp. 57–62. <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2012.02.002>
7. Alam M. N., Akbar M. A., Mohyud-Din S. T. General traveling wave solutions of the strain wave equation in microstructured solids via the new approach of generalized G'/G -expansion method. *Alexandria Engineering Journal*, 2014, vol. 53, iss. 1, pp. 233–241. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2014.01.002>
8. Fan E., Zhang H. A note on the homogeneous balance method. *Physics Letters A*, 1998, vol. 246, iss. 5, pp. 403–406. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00547-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00547-7)
9. Bai C. L. Extended homogeneous balance method and Lax pairs, Bäcklund transformation. *Communications in Theoretical Physics*, 2002, vol. 37, no. 6, pp. 645–648. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/37/6/645>
10. Alharbi A. R., Almatrafi M. B. New exact and numerical solutions with their stability for Ito integro-differential equation via Riccati–Bernoulli sub-ODE method. *Journal of Taibah University for Science*, 2020, vol. 14, iss. 1, pp. 1447–1456. <https://doi.org/10.1080/16583655.2020.1827853>
11. Yang X. F., Deng Z. C., Wei Y. A Riccati–Bernoulli sub-ODE method for nonlinear partial differential equations and its application. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2015, vol. 2015, no. 117, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1186/s13662-015-0452-4>
12. Alquran M., Jarrah A. Jacobi elliptic function solutions for a two-mode KdV equation. *Journal of King Saud University – Science*, 2019, vol. 31, iss. 4, pp. 485–489. <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2017.06.010>
13. Zhang W. The extended tanh method and the exp-function method to solve a kind of nonlinear heat equation. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, Article ID 935873, 12 p. <https://doi.org/10.1155/2010/935873>
14. He J. H., Wu X. H. Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 30, iss. 3, pp. 700–708. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.020>
15. Gaber A. A., Aljohani A. F., Ebaid A., Tenreiro Machado J. The generalized Kudryashov method for nonlinear space-time fractional partial differential equations of Burgers type. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 95, no. 3, pp. 361–368. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4568-4>
16. Nizovtseva I. G., Galenko P. K., Alexandrov D. V., Vikharev S. V., Titova E. A., Sukhachev I. S. Traveling waves in a profile of phase field: exact analytical solutions of a hyperbolic Allen–Cahn equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 245–257 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm160211>



17. Tchier F., Inc M., Yusuf A. Symmetry analysis, exact solutions and numerical approximations for the space-time Carleman equation in nonlinear dynamical systems. *The European Physical Journal Plus*, 2019, vol. 134, no. 250, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12586-1>
18. Dukhnovskii S. A. Solutions of the Carleman system via the Painlevé expansion. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). <https://doi.org/10.46698/s8185-4696-7282-p>
19. Lindblom O., Euler N. Solutions of discrete-velocity Boltzmann equations via Bateman and Riccati equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 131, no. 2, pp. 595–608. <https://doi.org/10.1023/A:1015428229008>
20. Dukhnovskii S. A. Asymptotic stability of equilibrium states for Carleman and Godunov–Sultangazin systems of equations. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 246–248. <https://doi.org/10.3103/S0027132219060068>
21. Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 392–454. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4080-x>

Поступила в редакцию / Received 16.02.2021

Принята к публикации / Accepted 28.10.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 15–27

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 15–27

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-15-27>

Научная статья

УДК 514.17

Теоремы единственности восстановления прообраза при вырожденных преобразованиях

А. А. Клячин, В. А. Клячин[✉]

Волгоградский государственный университет (ВолГУ), Россия, 400062, г. Волгоград, Университетский пр-т, д. 100

Клячин Алексей Александрович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций, klyachin-aa@yandex.ru, klyachin.aa@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>, AuthorID: 9530

Клячин Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>, AuthorID: 616063

Аннотация. При решении задач трехмерной реконструкции объектов по изображениям актуальной является задача определения условий, при которых такая реконструкция будет иметь ту или иную степень единственности. Именно такие условия позволяют применить, в частности, методы глубокого машинного обучения с использованием сверточных нейронных сетей для определения пространственной ориентации объектов или их составных частей. С математической точки зрения задача сводится к определению условий восстановления прообраза для преобразования проекции. В настоящей статье доказан ряд теорем единственности такого рода восстановления. В частности, доказано, что параметры преобразования вращения, близкого к тождественному, однозначно могут быть определены по проекции результата такого вращения объекта, заданной структуры. Кроме этого, в статье найдены условия, при которых пространственная ориентация объекта может быть вычислена по его проекции.

Ключевые слова: проекция множества, преобразование вращения, пространственная реконструкция, пространственная ориентация

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект «Развитие методики виртуальной 3D реконструкции исторических объектов», шифр научной темы 2019–0920, номер проекта в системе управления НИР FZUU-0633-2020-0004).

Для цитирования: Клячин А. А., Клячин В. А. Теоремы единственности восстановления прообраза при вырожденных преобразованиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 15–27. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-15-27>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Uniqueness theorems for recovering the inverse image under degenerate transformations

A. A. Klyachin, V. A. Klyachin[✉]

Volgograd State University, 100 Prosp. Universitetsky, Volgograd 400062, Russia

Alexey A. Klyachin, klyachin-aa@yandex.ru, klyachin.aa@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3293-9066>, AuthorID: 9530

Vladimir A. Klyachin, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7849>, AuthorID: 616063

Abstract. When solving problems of three-dimensional reconstruction of objects from images, the problem of determining the conditions under which such a reconstruction will have one or another degree of uniqueness is relevant. It is these conditions that make it possible to apply, in particular, deep machine learning methods using convolutional neural networks to determine the spatial orientation of objects or their constituent parts. From a mathematical point of view, the problem is reduced to determining the conditions for restoring the preimage for transforming the projection. In this article, we prove a number of uniqueness theorems for this kind of restoration. In particular, it has been proved that the parameters of a rotation transformation close to identical can be uniquely determined from the projection of the result of such rotation of an object with a given structure. In addition, the article found the conditions under which the spatial orientation of an object can be calculated from its projection.

Keywords: set projection, rotation transform, spatial reconstruction, spatial orientation

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russia (project “Development of Virtual 3D Reconstruction of Historical Objects Technique”, scientific theme code 2019–0920, project number in the research management system FZUU-0633-2020-0004).

For citation: Klyachin A. A., Klyachin V. A. Uniqueness theorems for recovering the inverse image under degenerate transformations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 15–27 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-15-27>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Одной из актуальных проблем при построении систем компьютерного зрения является задача определения пространственной ориентации и пространственного положения объекта по фотоснимку. Например, подобная задача особенно важна для систем автономного вождения, в которых определение положения ближайших автомобилей является ключевым вопросом для автономных транспортных средств в городской среде. В связи с этим, например, в 2019 г. Лаборатория робототехники и автономного вождения Baidu совместно с Пекинским университетом поставили соответствующую задачу содружеству Kaggle (<https://www.kaggle.com/c/pku-autonomous-driving>) и предоставили более 60 000 экземпляров трехмерных автомобилей с маркировкой из 5277 реальных изображений. Нужно отметить, что попытки



решения подобных задач и не только для автомобилей в качестве объектов предпринимались и ранее. Так, следует отметить работу [1], в которой представлен один из методов оценки положений и размеров параллелепипедов (3D боксов), охватывающих автомобиль в пространстве по его изображению на фотоснимке. В указанной работе производится оценка местоположения автомобиля по углу рыскания (углу поворота вокруг вертикальной оси), поскольку предполагается, что камера наблюдателя выровнена относительно дорожного полотна и угол между плоскостью камеры и плоскостью дороги не изменен и составляет значение $\pi/2$. Данное допущение является вполне состоятельным, поскольку для большинства задач автономного вождения, распознавания объектов городского трафика и т. п. значение крена и тангажа для автомобилей на дороге не является существенным, если, конечно, речь не идет о положении автотранспорта на специальных конструкциях вроде въездов/съездов с мостов, пандусов, развязок и т. д. (хотя вопрос с детектированием пространственного расположения автомобилей в местах выездов и заездов на развязки становится все более актуальным). Эти же приемы были использованы в работах [2, 3]. Аналогичная задача об определении 3D положения объектов решалась в работе [4], в которой использовались модифицированные сверточные нейронные сети и специально подготовленные маски объектов с пониженной дискретизацией. В работе [5] использовался метод, основанный на покадровом слежении за объектом, а обучающая модель строилась на основании рекуррентных LSTM нейронных сетей. Отметим также работу [6], в которой для целостной реконструкции трехмерной сцены предлагается ее описание в виде грамматики, а результат реконструкции авторы строят в виде специального графа. Надо отметить, что подобные задачи реконструкции возникают, например, и при восстановлении трехмерной модели лица и позы человека по фотографии (см., например, [7, 8]).

Анализ указанных работ и работ, процитированных в них, показывает, что наиболее часто для решения задач пространственного анализа изображений применяются нейронные сети. Это понятно — сверточные нейронные сети могут автоматически выявлять признаки на изображениях и определять их значимость на основе датасета, используемого в обучении. Безусловно, подход, основанный на использовании нейронных сетей, заслуживает внимания, но он требует очень большого набора данных для обучения. Поэтому, как нам кажется, полезным было бы уметь проводить прямые вычисления пространственных данных, основываясь исключительно на характерных особенностях изображений самих объектов. Так, например, в работе [9] было показано, что ориентация плоскости круга в пространстве может быть получена по характеристикам эллиптической области, являющейся проекцией круга. В работе [10] был получен и описан алгоритм восстановления профиля видимой части поверхности вращения по ее проекции. В подобных задачах важную роль играют теоремы единственности: с какой степенью однозначности может быть восстановлен объект по своей проекции? В настоящей работе мы формулируем ряд утверждений общего характера, а также даем полное решение задачи определения пространственной ориентации объекта по его проекции в некоторых частных случаях. Математической моделью объектов мы выбрали конечные подмножества евклидова пространства $P \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Следует указать работы [11, 12], в которых предложены методы решения задач, подобных нашей, с использованием методов машинного обучения, а также [13], в которой обратные задачи для преобразования проекции рассматривались в рамках исследований компьютерной томографии биологических объектов.



1. Однозначное определение множества по его проекции

Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $P = \{p_1, \dots, p_N, N > 0\}$ — конечное множество евклидова пространства \mathbb{R}^n . Будем рассматривать два вида вырожденных отображений. Во-первых, отображения ортогональной проекции $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, $0 < k < n$, во-вторых, отображение центральной проекции $\pi_c : \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \rightarrow \Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$, заданное формулой $x \mapsto x/x_n$. Мы ставим задачу определения множества P по его проекции $\pi(P)$ или $\pi_c(P)$. Конечно, в общем случае такая задача не имеет единственного решения. Но если, например, известна некоторая структура множества P , то можно надеяться на то, что множество P возможно будет восстановить по своей проекции. В настоящей статье мы будем рассматривать структуру множества P , заданную в виде системы соотношений для длин $d = \{d_{ij} : d_{ij} = |p_i - p_j|\}$ и углов $\alpha = \{\alpha_{ijk} : \alpha_{ijk} = \angle p_i p_j p_k, i \neq j, i \neq k, j \neq k\}$ в виде уравнения

$$F(d, \alpha) = 0. \tag{1}$$

Например, если взять $N = n + 1$, то система соотношений

$$d_{ij} = d_{kl}, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

задает структуру правильного симплекса в \mathbb{R}^n . Прежде чем переходить к некоторым полным решениям задач восстановления, сформулируем ряд общих утверждений, лежащих в основе обоснования возможности однозначного определения прообраза проекции. Рассмотрим сначала случай ортогональной проекции π . Введем следующее обозначение:

$$\delta = \min_{i \neq j} |\pi(p_i) - \pi(p_j)|.$$

Лемма 1. Пусть $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ такие преобразования, что для всякого $x \in P \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f_i(x) - x| < \delta/3, \quad i = 1, 2.$$

Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- или имеют место равенства

$$\pi(f_1(p_i)) = \pi(f_2(p_i)), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

- или выполнено

$$\pi(f_1(P)) \neq \pi(f_2(P)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные $i \neq j, i, j = 1, \dots, N$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta &\leq |\pi(p_i) - \pi(p_j)| = |\pi(p_i) - \pi(f_1(p_i)) + \pi(f_1(p_i)) - \pi(f_2(p_j)) + \pi(f_2(p_j)) - \pi(p_j)| \leq \\ &\leq |\pi(p_i) - \pi(f_1(p_i))| + |\pi(f_1(p_i)) - \pi(f_2(p_j))| + |\pi(f_2(p_j)) - \pi(p_j)| \leq \\ &\leq |p_i - f_1(p_i)| + |\pi(f_1(p_i)) - \pi(f_2(p_j))| + |p_j - f_2(p_j)| < \frac{2\delta}{3} + |\pi(f_1(p_i)) - \pi(f_2(p_j))|. \end{aligned}$$

Откуда следует неравенство

$$|\pi(f_1(p_i)) - \pi(f_2(p_j))| > \frac{\delta}{3}. \tag{2}$$



Предположим теперь, что не выполнена вторая альтернатива в утверждении леммы, т. е. имеет место равенство

$$\pi(f_1(P)) = \pi(f_2(P)).$$

Тогда для всякого $i = 1, 2, \dots, N$ найдется номер $j = 1, 2, \dots, N$, такой, что $\pi(f_1(p_i)) = \pi(f_2(p_j))$. Данные равенства не могут выполняться для $i \neq j$ в силу неравенства (2). Поэтому выполнена первая альтернатива. Теперь предположим, что не выполнена первая альтернатива, т. е. при некотором $i = 1, 2, \dots, N$ имеет место неравенство $\pi(f_1(p_i)) \neq \pi(f_2(p_i))$. Тогда возможны два варианта. В первом варианте — точка $\pi(f_1(p_i)) \notin \pi(f_2(P))$. Это влечет выполнение второй альтернативы. Во втором варианте возможно равенство $\pi(f_1(p_i)) = \pi(f_2(p_j))$ при некотором $j \neq i$. Но это невозможно в силу неравенства (2). Теперь лемма доказана полностью. \square

Для случая центральной проекции доказательство аналогичного утверждения несколько усложняется, поскольку центральная проекция не является линейным отображением. Более того, не ограничивая общности, мы будем предполагать, что множество P лежит в $\Pi^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 1\}$. Докажем следующее неравенство для всякой пары точек $x, y \in \Pi^+$:

$$|\pi_c(x) - \pi_c(y)| \leq |x - y||y|. \quad (3)$$

Введем обозначения $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\pi_c(x) - \pi_c(y)| &= \left| \frac{x'}{x_n} - \frac{y'}{y_n} \right| = \left| \frac{x'}{x_n} - \frac{y'}{x_n} + \frac{y'}{x_n} - \frac{y'}{y_n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{x'}{x_n} - \frac{y'}{x_n} \right| + \left| \frac{y'}{x_n} - \frac{y'}{y_n} \right| = \frac{|x' - y'|}{|x_n|} + \frac{|y'||x_n - y_n|}{|x_n||y_n|} \leq \\ &\leq (|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}} (y_n^2 + |y'|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x_n||y_n|} = |x - y||y| \frac{1}{|x_n||y_n|} \leq |x - y||y|. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (3) доказано. Положим

$$\begin{aligned} M &= \max_{p_i \in P} |p_i|, \\ \delta_c &= \min_{i \neq j} |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Имеет место

Лемма 2. Пусть $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ такие преобразования, что для всякого $x \in P \subset \mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f_i(x) - x| < \frac{\delta_c}{3M}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- или имеют место равенства

$$\pi_c(f_1(p_i)) = \pi_c(f_2(p_i)), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

- или выполнено

$$\pi_c(f_1(P)) \neq \pi_c(f_2(P)).$$



Доказательство. Рассмотрим произвольные $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta_c \leq |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| &= |\pi_c(p_i) - \pi_c(f_1(p_i)) + \pi_c(f_1(p_i)) - \pi_c(f_2(p_j)) + \pi_c(f_2(p_j)) - \pi_c(p_j)| \leq \\ &\leq |\pi_c(p_i) - \pi_c(f_1(p_i))| + |\pi_c(f_1(p_i)) - \pi_c(f_2(p_j))| + |\pi_c(f_2(p_j)) - \pi_c(p_j)|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (3), получаем

$$\begin{aligned} \delta_c \leq |p_i - f_1(p_i)||p_i| + |\pi_c(f_1(p_i)) - \pi_c(f_2(p_j))| + |p_j - f_2(p_j)||p_j| < \\ < 2M \frac{\delta_c}{3M} + |\pi_c(f_1(p_i)) - \pi_c(f_2(p_j))|. \end{aligned}$$

Откуда следует неравенство

$$|\pi_c(f_1(p_i)) - \pi_c(f_2(p_j))| > \frac{\delta_c}{3}. \quad (5)$$

Далее доказательство ничем не отличается от заключительной части доказательства леммы 1. \square

Лемма 3. Пусть $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — преобразование, представляющее собой композицию поворота вокруг оси L , проходящей через начало координат и смещения вдоль вектора, ортогонального L . Обозначим через A матрицу этого вращения, а через T — вектор смещения, так, что имеет место равенство $R(x) = Ax + T \forall x \in \mathbb{R}^3$. Предположим, что выполнено неравенство

$$\|A - I\| \cdot M + |T| < \frac{\delta_c}{3M}, \quad (6)$$

где δ_c , M определены формулами (4). Тогда, если множество P не является плоским, то $\pi_c(R(P)) \neq \pi_c(P)$

Доказательство. Для $x \in P$ имеем

$$|R(x) - x| = |A(x) - (x) + T| \leq \|A - I\| \cdot |x| + |T| \leq \frac{\delta_c}{3M}.$$

Отсюда следует, что выполнены условия леммы 2 при $f_1(x) = R(x)$, $f_2(x) = x$. Покажем, что при выполнении первой альтернативы множество P лежит в плоскости, ортогонально прямой L и проходящей через центр проекции. Действительно, пусть $i \neq j$. Обозначим через Π_i, Π_j плоскости, ортогональные оси вращения L и проходящие через точки p_i, p_j соответственно. Из выполнения первой альтернативы леммы 2 следует, что $\pi_c(p_i) = \pi_c(R(p_i))$, $\pi_c(p_j) = \pi_c(R(p_j))$. Вектор смещения ортогонален прямой L , так что $R(p_i) \in \Pi_i$, $R(p_j) \in \Pi_j$. С другой стороны, прямые, содержащие точки $p_i, R(p_i)$ и $p_j, R(p_j)$, проходят через центр проекции. Из этого следует, что плоскости Π_i, Π_j совпадают как параллельные плоскости, содержащие центр проекции. Таким образом, мы получаем, что все точки множества P лежат в одной плоскости, ортогональной оси вращения. Лемма доказана. \square

Пусть $R_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ — два преобразования вида композиции вращения и параллельного переноса такие, что $R_i(x) = A_i x + T_i$, где A_i — матрица вращения в стандартном базисе. Пусть E — собственный вектор матрицы $A_2 A_1^{-1}$ — вектор, задающий ось вращения для композиции вращений A_1^{-1} и A_2 . При этом считаем, что



вектор $T_2 - A_2A_1^{-1}(T_1)$ ортогонален вектору E . Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$\|A_i - I\|M + |T_i| \leq \min \left\{ \frac{\delta_c}{30M}, M \right\}. \quad (7)$$

Из доказанных вспомогательных утверждений следует

Теорема 1. Пусть $P \subset \mathbb{R}^3 \cap \Pi^+$ — конечное множество, не лежащее в одной плоскости и такое, что

$$\delta_c = \min_{i \neq j} |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| > 0.$$

Тогда для двух преобразований $R_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ указанного выше вида, удовлетворяющих условию (7), выполнено

$$\pi_c(R_1(P)) \neq \pi_c(R_2(P)).$$

Доказательство. Рассмотрим множество $P_0 = R_1(P)$. Построим отображение $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ как композицию исходных отображений $R = R_2 \circ R_1^{-1}$. Ясно, что $R(P_0) = R_2(P)$. Поэтому нам достаточно показать, что $\pi_c(P_0) \neq \pi_c(R(P_0))$. Мы это сделаем, показав, что для множества P_0 и отображения R выполнены условия леммы 3. С этой целью заметим, что

$$R_2 \circ R_1^{-1}(x) = A_2A_1^{-1}x + T_2 - A_2A_1^{-1}(T_1).$$

То есть R есть композиция вращения и параллельного переноса. Причем вектор смещения $T_2 - A_2A_1^{-1}(T_1)$ ортогонален оси вращения для преобразования поворота $A_2A_1^{-1}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} |A_2A_1^{-1}(z) - z| &= |A_2A_1^{-1}(z) - A_1^{-1}(z) + A_1^{-1}(z) - z| \leq \\ &\leq |A_2A_1^{-1}(z) - A_1^{-1}(z)| + |A_1^{-1}(z) - z| \leq \\ &\leq \|A_2 - I\| \cdot |A_1^{-1}(z)| + |A_1^{-1}(z)| \cdot \|I - A_1\| \leq (\|A_1 - I\| + \|A_2 - I\|)|z|. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что для вращений $|A_i(z)| = |A_i^{-1}(z)| = |z|$. Следовательно, из предыдущих выкладок получаем неравенство $\|A_2A_1^{-1} - I\| \leq \|A_1 - I\| + \|A_2 - I\|$. Далее, для точек $q_i \in P_0$ применяя неравенство (3), имеем

$$\begin{aligned} |\pi_c(q_i) - \pi_c(q_j)| &= |\pi_c(q_i) - \pi_c(p_i) + \pi_c(p_i) - \pi_c(p_j) + \pi_c(p_j) - \pi_c(q_j)| \geq \\ &\geq |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| - |q_i - p_i||p_i| - |q_j - p_j||p_j| \geq \\ &\geq |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| - 2M(\|A_1 - I\|M + |T_1|). \end{aligned}$$

Поэтому из условия (7) получаем

$$\delta_0 = \min_{i \neq j} |\pi_c(q_i) - \pi_c(q_j)| \geq \frac{14\delta_c}{15}. \quad (8)$$

Далее оценим величины, стоящие в знаменателе неравенства (6). Пусть $M_0 = \max_{q \in P_0} |q|$. Имеем

$$|q_i| = |R_1(p_i)| = |A_1(p_i) + T_1| \leq M + |T_1|.$$



И поскольку из условия (7) следует, что $|T_1| \leq M$, будем иметь

$$|q_i| \leq 2M, \quad q_i \in P_0.$$

Поэтому $M_0 \leq 2M$. Обозначим через T вектор $T = T_2 - A_2 A_1^{-1}(T_1)$, а через A матрицу $A_2 A_1^{-1}$. Тогда для левой части неравенства (6) в случае множества P_0 будем иметь

$$\|A - I\|M_0 + |T| \leq (\|A_1 - I\| + \|A_2 - I\|)(M + |T_1|) + |T|.$$

Заметим, что

$$|T| \leq |T_1| + |T_2|,$$

и поскольку из неравенства (7) следует, что

$$|T_i| \leq \frac{\delta_c}{30M},$$

получаем неравенство $|T| \leq \delta_c/(15M)$. Применяя еще раз неравенство (7), получаем

$$\|A - I\|M_0 + |T| \leq \frac{\delta_c}{15M} + \frac{\delta_c^2}{450M^3} + \frac{\delta_c}{15M} \leq \frac{2\delta_c}{15M} + \frac{\delta_c^2}{450M^3}.$$

Правая часть неравенства (6) может быть оценена, используя (8)

$$\frac{\delta_0}{3M_0} \geq \frac{14\delta_c}{3 \cdot 15M_0} \geq \frac{7\delta_c}{45M}.$$

Остается проверить неравенство

$$\frac{2\delta_c}{15M} + \frac{\delta_c^2}{450M^3} \leq \frac{7\delta_c}{45M},$$

которое после преобразований будет эквивалентно неравенству

$$\delta_c \leq 10M^2.$$

Это неравенство очевидно выполнено, поскольку

$$\delta_c \leq |\pi_c(p_i) - \pi_c(p_j)| \leq |p_i - p_j| |p_j| \leq 2M^2 < 10M^2.$$

Таким образом выполнены все условия леммы 3, и это завершает доказательство теоремы. \square

Замечание 1. Из доказанной теоремы следует такой факт. Если множество $P \subset \mathbb{R}^3$ не является плоским, то найдется не более одного вращения R , близкого к тождественному преобразованию, переводящего множество P в множество, имеющее заданную центральную проекцию. То, что глобально теорема не может быть справедливой, очевидно. Достаточно привести примеры множеств P , имеющих нетривиальную группу симметрий.



2. Условия локальной однозначности

Дадим иной подход к решению поставленной задачи, который в какой-то степени будет рассматриваться в более общей ситуации. Сформулируем искомые условия для произвольного семейства преобразований.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^3 имеется набор точек $P = \{p_i\}_{i=1}^N$ и задано семейство преобразований $R^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, зависящих от набора параметров $t = (t_1, \dots, t_m)$ и таких, что при $t = (0, \dots, 0)$ преобразование R^0 является тождественным. Через P^t будем обозначать образ набора точек P при отображении R^t , т. е. $P^t = \{R^t(p_i)\}_{i=1}^N$. Мы исследуем следующую задачу: при каких условиях на расположение точек p_i по набору точек $Q^t = \{\pi(R^t(p_i))\}_{i=1}^N$ или $Q^t = \{\pi_c(R^t(p_i))\}_{i=1}^N$ можно однозначно восстановить набор точек P^t при малых значениях всех параметров t_1, \dots, t_m .

Рассмотрим сначала случай ортогональной проекции π на плоскость $z = 0$. Пусть отображение $R^t = (R_1(x, y, z, t_1, \dots, t_m), R_2(x, y, z, t_1, \dots, t_m), R_3(x, y, z, t_1, \dots, t_m))$. Естественно предположить, что $m = 2N$. Введем следующие обозначения. Пусть $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $Q_i^t = (u_i^t, v_i^t, 0)$, $i = 1, \dots, N$. Тогда мы можем записать систему уравнений

$$\begin{cases} R_1(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) & = u_1^t \\ R_2(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) & = v_1^t \\ \vdots & \vdots \\ R_1(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}) & = u_N^t \\ R_2(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}) & = v_N^t. \end{cases} \quad (9)$$

Если из этой системы уравнений можно однозначно выразить набор параметров t_1, \dots, t_{2N} , то по ним мы сможем вычислить положения точек $p_i^t = R^t(p_i)$. По теореме об обратном отображении условием локальной разрешимости системы уравнений (9) в окрестности точки $t = 0$ является ненулевой якобиан. Поэтому получаем условие

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial t_1}(x_1, y_1, z_1, 0) & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial t_{2N}}(x_1, y_1, z_1, 0) \\ \frac{\partial R_2}{\partial t_1}(x_1, y_1, z_1, 0) & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial t_{2N}}(x_1, y_1, z_1, 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_1}{\partial t_1}(x_N, y_N, z_N, 0) & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial t_{2N}}(x_N, y_N, z_N, 0) \\ \frac{\partial R_2}{\partial t_1}(x_N, y_N, z_N, 0) & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial t_{2N}}(x_N, y_N, z_N, 0) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Аналогично можно поступить, если осуществляется центральная проекция на плоскость $z = 1$ с центром в начале координат. В этом случае приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} R_1(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) & = u_1^t R_3(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) \\ R_2(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) & = v_1^t R_3(x_1, y_1, z_1, t_1, \dots, t_{2N}) \\ \vdots & \vdots \\ R_1(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}) & = u_N^t R_3(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}) \\ R_2(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}) & = v_N^t R_3(x_N, y_N, z_N, t_1, \dots, t_{2N}). \end{cases}$$



Учитывая, что центральные проекции начального набора точек P имеют координаты $(x_i/z_i, y_i/z_i, 1)$, и выписывая определитель, приходим к условию

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \frac{\partial R_1}{\partial t_1}(p_1, 0) - x_1 \frac{\partial R_3}{\partial t_1}(p_1, 0) & \dots & z_1 \frac{\partial R_1}{\partial t_{2N}}(p_1, 0) - x_1 \frac{\partial R_3}{\partial t_{2N}}(p_1, 0) \\ z_1 \frac{\partial R_2}{\partial t_1}(p_1, 0) - y_1 \frac{\partial R_3}{\partial t_1}(p_1, 0) & \dots & z_1 \frac{\partial R_2}{\partial t_{2N}}(p_1, 0) - y_1 \frac{\partial R_3}{\partial t_{2N}}(p_1, 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_N \frac{\partial R_1}{\partial t_1}(p_N, 0) - x_N \frac{\partial R_3}{\partial t_1}(p_N, 0) & \dots & z_N \frac{\partial R_1}{\partial t_{2N}}(p_N, 0) - x_N \frac{\partial R_3}{\partial t_{2N}}(p_N, 0) \\ z_N \frac{\partial R_2}{\partial t_1}(p_N, 0) - y_N \frac{\partial R_3}{\partial t_1}(p_N, 0) & \dots & z_N \frac{\partial R_2}{\partial t_{2N}}(p_N, 0) - y_N \frac{\partial R_3}{\partial t_{2N}}(p_N, 0) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (11)$$

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, которое для любого $t \in \mathbb{R}^{2N}$ ставит в соответствие точку

$$(u_1^t, v_1^t, \dots, u_N^t, v_N^t).$$

Тогда, если выполняется одно из условий (10) или (11), отображение F взаимно однозначно в окрестности точки $t = 0$.

Используя данный подход, выпишем условия для системы поворотов относительно некоторой точки (x_0, y_0, z_0) . Так как поворот точки задается двумя углами $(t_1 = \varphi, t_2 = \psi)$, мы рассмотрим семейство поворотов:

$$\begin{aligned} R_1(x, y, z, \varphi, \psi) &= x_0 + (x - x_0) \cos \psi - (z - z_0) \sin \psi, \\ R_2(x, y, z, \varphi, \psi) &= y_0 - (x - x_0) \sin \varphi \sin \psi + (y - y_0) \cos \varphi - (z - z_0) \sin \varphi \cos \psi, \\ R_3(x, y, z, \varphi, \psi) &= z_0 + (x - x_0) \cos \varphi \sin \psi + (y - y_0) \sin \varphi + (z - z_0) \cos \varphi \cos \psi, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

Если центр поворота фиксирован, то нам достаточно выписать условие для одной точки, например p_1 . Вычислим определитель (10), считая, что $t_1 = \varphi, t_2 = \psi$:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -z_1 + z_0 \\ -z_1 + z_0 & 0 \end{pmatrix} = -(z_1 - z_0)^2.$$

Поэтому в данном простом случае отображение $F(\varphi, \psi)$ будет взаимно однозначным при малых углах поворота φ и ψ , если хотя бы одна точка из набора $\{p_i\}_{i=1}^N$ не лежит на плоскости $z = z_0$.

Рассмотрим теперь семейство поворотов вокруг произвольной точки и горизонтальных сдвигов. В этом случае добавляются еще два параметра, и преобразование будет иметь вид

$$\begin{aligned} R_1(x, y, z, a, b, \varphi, \psi) &= a + (x - x_0) \cos \psi - (z - z_0) \sin \psi, \\ R_2(x, y, z, a, b, \varphi, \psi) &= b - (x - x_0) \sin \varphi \sin \psi + (y - y_0) \cos \varphi - (z - z_0) \sin \varphi \cos \psi, \\ R_3(x, y, z, a, b, \varphi, \psi) &= z_0 + (x - x_0) \cos \varphi \sin \psi + (y - y_0) \sin \varphi + (z - z_0) \cos \varphi \cos \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, нам нужна будет еще одна точка $(t_1 = a, t_2 = b, t_3 = \varphi, t_4 = \psi)$. Тогда, вычисляя определитель (10), получаем

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -z_1 + z_0 \\ 0 & 1 & -z_1 + z_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -z_2 + z_0 \\ 0 & 1 & -z_2 + z_0 & 0 \end{pmatrix} = -(z_1 - z_2)^2.$$



Отображение $F(a, b, \varphi, \psi)$ будет взаимно однозначным при малых сдвигах a, b и малых углах поворота φ, ψ , если найдутся две точки из набора $\{p_i\}_{i=1}^N$, которые не лежат в одной плоскости $z = \text{const}$.

Перейдем к случаю центральной проекции π_c . Рассмотрим сначала семейство преобразований (12). Для него условие (11) легко вычисляется и имеет вид

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_1(y_1 - y_0) & z_1(z_1 - z_0) + x_1(x_1 - x_0) \\ z_1(z_1 - z_0) + y_1(y_1 - y_0) & y_1(x_1 - x_0) \end{pmatrix} = \\ = (z_1 - z_0)(x_1(x_1 - x_0) + y_1(y_1 - y_0) + z_1(z_1 - z_0)) = \\ = (z_1 - z_0) \left(\left(x_1 - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_0}{2}\right)^2 + \left(z_1 - \frac{z_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Это условие означает, что хотя бы одна точка из набора $\{p_i\}_{i=1}^N$ не лежит ни в плоскости $z = z_0$, ни на сфере радиуса $1/2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ с центром в точке $(x_0/2, y_0/2, z_0/2)$.

Рассмотрим теперь повороты со сдвигами (13). Условие (11) будет таким:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} z_1 & 0 & x_1(y_1 - y_0) & z_1(z_1 - z_0) + x_1(x_1 - x_0) \\ 0 & z_1 & z_1(z_1 - z_0) + y_1(y_1 - y_0) & y_1(x_1 - x_0) \\ z_2 & 0 & x_2(y_2 - y_0) & z_2(z_2 - z_0) + x_2(x_2 - x_0) \\ 0 & z_2 & z_2(z_2 - z_0) + y_2(y_2 - y_0) & y_2(x_2 - x_0) \end{pmatrix} = \\ = -z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2)^2 + z_1 z_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) ((x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)) + \\ + z_1 z_2 (z_1 - z_2) (z_1 (x_2 (x_2 - x_0) + y_2 (y_2 - y_0)) - z_2 (y_1 (y_1 - y_0) + x_1 (x_1 - x_0))) \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Суммируя все полученные результаты, приходим к следующим утверждениям.

Теорема 2. 1) Отображение $F(\varphi, \psi)$, соответствующее семейству поворотов (12) и ортогональной проекции, взаимно однозначно при малых углах поворота φ и ψ , если в наборе точек $\{p_i\}_{i=1}^N$ найдется хотя бы одна точка, не лежащая в плоскости $z = z_0$.

2) Отображение $F(a, b, \varphi, \psi)$, соответствующее семейству преобразований (13) и ортогональной проекции, взаимно однозначно при малых сдвигах a, b и малых углах поворота φ, ψ , если в наборе точек $\{p_i\}_{i=1}^N$ найдутся хотя бы две точки, не лежащие в одной плоскости $z = \text{const}$.

Теорема 3. 1) Отображение $F(\varphi, \psi)$, соответствующее семейству поворотов (12) и центральной проекции, взаимно однозначно при малых углах поворота φ и ψ , если хотя бы одна точка из набора $\{p_i\}_{i=1}^N$ не лежит в плоскости $z = z_0$ и одновременно не лежит на сфере радиуса $1/2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ с центром в точке $(x_0/2, y_0/2, z_0/2)$.

2) Отображение $F(a, b, \varphi, \psi)$, соответствующее семейству преобразований (13) и центральной проекции, взаимно однозначно при малых сдвигах a, b и при малых углах поворота φ, ψ , если в наборе точек $\{p_i\}_{i=1}^N$ найдутся хотя бы две точки, например $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, для которых выполняется неравенство (14).



Заключение

В статье рассмотрена задача об однозначном определении пространственных точек по их ортогональной и центральной проекциям при условии, что данный набор точек есть образ некоторого начального набора точек параметрического семейства преобразований. Получены условия на начальное расположение точек, гарантирующие такое однозначное восстановление для семейства малых поворотов и малых сдвигов (теорема 2 и теорема 3).

Список литературы

1. Mousavian A., Anguelov D., Flynn J., Kosecka J. 3D Bounding Box Estimation Using Deep Learning and Geometry // 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2017. P. 5632–5640. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2017.597>
2. Gordeev A. Y., Klyachin V. A. Determination of the Spatial Position of Cars on the Road Using Data from a Camera or DVR // «Smart Technologies» for Society, State and Economy / eds.: E. G. Popkova, B. S. Sergi. ISC 2020. Lecture Notes in Networks and Systems. Vol. 155. Cham : Springer, 2021. P. 172–180. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59126-7_20
3. Gordeev A. Y., Klyachin V. A., Kurbanov E. R., Driaba A. Y. Autonomous Mobile Robot with AI Based on Jetson Nano // Proceedings of the Future Technologies Conference (FTC), 2020. Vol. 1 / eds.: K. Arai, S. Kapoor, R. Bhatia. FTC 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1288. Cham : Springer, 2021. P. 190–204. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63128-4_15
4. Ren M., Pokrovsky A., Yang B., Urtasun R. SBNet: Sparse Blocks Network for Fast Inference // 2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018. P. 8711–8720. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00908>
5. Hu H., Cai Q., Wang D., Lin J., Sun M., Krhenbhl P., Darrell T., Yu F. Joint Monocular 3D Vehicle Detection and Tracking // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. Seoul, Korea, 27 October – 2 November 2019. P. 5390–5399.
6. Huang S., Qi S., Zhu Y., Xiao Y., Xu Y., Zhu S. C. Holistic 3d scene parsing and reconstruction from a single rgb image // Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV), 2018. P. 187–203.
7. Jackson A. S., Bulat A., Argyriou V., Tzimiropoulos G. Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression // 2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). IEEE. 2017. P. 1031–1039.
8. Ferková Z., Urbanová P., Černý D., Žuži M., Matula P. Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image // Multimedia Tools and Applications. 2020. Vol. 79. P. 3217–3242. <https://doi.org/10.1007/s11042-018-6869-5>
9. Клячин В. А., Григорьева Е. Г. Алгоритм автоматического определения параметров ориентации камеры в пространстве на основе характерных элементов фотоснимка // Тенденции развития науки и образования. 2018. № 45, ч. 6. С. 10–20. <https://doi.org/10.18411/lj-12-2018-125>
10. Клячин В. А., Григорьева Е. Г. Алгоритм 3D реконструкции поверхности вращения по её проекции // Сибирский журнал промышленной математики. 2020. Т. 23, № 1. С. 84–92. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.108>
11. Kamnitsky S., Ghodsi A., Zohreh Azimifar S. Deep structure for end-to-end inverse rendering. 2017 // ArXiv, abs/1708.08998.
12. Kamnitsky S., Zohreh Azimifar S. End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image. 2017 // ArXiv, abs/1711.05858.
13. Penczek P. A. Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections // Methods in Enzymology. 2010. № 482. P. 1–33. [https://doi.org/10.1016/S0076-6879\(10\)82001-4](https://doi.org/10.1016/S0076-6879(10)82001-4)



References

1. Mousavian A., Anguelov D., Flynn J., & Kosecka J. 3D Bounding Box Estimation Using Deep Learning and Geometry. *2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017, pp. 5632–5640. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2017.597>
2. Gordeev A. Y., Klyachin V. A. Determination of the Spatial Position of Cars on the Road Using Data from a Camera or DVR. In: E. G. Popkova, B. S. Sergi, eds. *“Smart Technologies” for Society, State and Economy. ISC 2020*. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 155. Cham, Springer, 2021, pp. 172–180. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59126-7_20
3. Gordeev A. Y., Klyachin V. A., Kurbanov E. R., Driaba A. Y. Autonomous Mobile Robot with AI Based on Jetson Nano. In: K. Arai, S. Kapoor, R. Bhatia, eds. *Proceedings of the Future Technologies Conference (FTC)*, 2020, vol. 1. FTC 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1288. Cham, Springer, 2021, pp. 190–204. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63128-4_15
4. Ren M., Pokrovsky A., Yang B., Urtasun R. SBNNet: Sparse Blocks Network for Fast Inference. *2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2018, pp. 8711–8720. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2018.00908>
5. Hu H., Cai Q., Wang D., Lin J., Sun M., Krhenbhl P., Darrell T., Yu F. Joint Monocular 3D Vehicle Detection and Tracking. In: *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*. Seoul, Korea, 27 October – 2 November 2019, pp. 5390–5399.
6. Huang S., Qi S., Zhu Y., Xiao Y., Xu Y., & Zhu S. C. Holistic 3d scene parsing and reconstruction from a single rgb image. In: *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2018, pp. 187–203.
7. Jackson A. S., Bulat A., Argyriou V., Tzimiropoulos G. Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression. *2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. IEEE, 2017, pp. 1031–1039.
8. Ferkova Z., Urbanova P., Cerny D., Zuzi M., Matula P. Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image. *Multimedia Tools and Applications*, 2020, vol. 79, pp. 3217–3242. <https://doi.org/10.1007/s11042-018-6869-5>
9. Klyachin V. A., Grigorieva E. G. Algorithm for automatic determination of camera orientation parameters in space based on the characteristic elements of the photograph. *Tendencii razvitiya nauki i obrazovaniya*, 2018, no. 45, pt. 6, pp. 10–20 (in Russian). <https://doi.org/10.18411/lj-12-2018-125>
10. Klyachin V. A., Grigorieva E. G. A 3D reconstruction algorithm of a surface of revolution from its projection. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2020, vol. 14, pp. 85–91. <https://doi.org/10.1134/S1990478920010093>
11. Kamyab S., Ghodsi A., Zohreh Azimifar S. Deep structure for end-to-end inverse rendering. 2017. *ArXiv, abs/1708.08998*.
12. Kamyab S., Zohreh Azimifar S. End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image. 2017. *ArXiv, abs/1711.05858*.
13. Penczek P. A. Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections. *Methods in Enzymology*, 2010, no. 482, pp. 1–33. [https://doi.org/10.1016/S0076-6879\(10\)82001-4](https://doi.org/10.1016/S0076-6879(10)82001-4)

Поступила в редакцию / Received 26.12.2020

Принята к публикации / Accepted 07.10.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 28–47

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 28–47

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-28-47>

Научная статья

УДК 519.725

Об алгоритмах декодирования кодов Гоппы на случай ошибок и стираний

С. М. Рацевев^{1✉}, О. И. Череватенко²

¹Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42

²Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 432071, г. Ульяновск, пл. Ленина, д. 4/5

Рацевев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, ratseevsm@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4995-9418>

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, choi2008@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3931-9425>

Аннотация. В 1978 г. Мак-Элис построил первую кодовую криптосистему с открытым ключом, которая основана на применении помехоустойчивых кодов. Данная криптосистема именно на основе кодов Гоппы считается перспективной и криптостойкой с учетом квантовых вычислений. При этом эффективные атаки на секретные ключи этой криптосистемы до сих пор не найдены. В работе исследуются алгоритмы декодирования кодов Гоппы на случай ошибок и стираний. Приводятся четыре алгоритма декодирования на основе алгоритмов для кодов Рида–Соломона, предложенных Гао, Берлекэмпом и Месси, Сугиямой и др. Первые два алгоритма строятся на основе алгоритма Гао и относятся к алгоритмам бессиндромного декодирования, остальные — к алгоритмам синдромного декодирования. При этом любой из этих алгоритмов применим и для случая канала связи только с ошибками. Также приводятся примеры декодирования сепарабельных кодов Гоппы с использованием данных алгоритмов.

Ключевые слова: помехоустойчивые коды, коды Рида–Соломона, коды Гоппы, декодирование кода

Для цитирования: Рацевев С. М., Череватенко О. И. Об алгоритмах декодирования кодов Гоппы на случай ошибок и стираний // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 28–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-28-47>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Decoding algorithms for Goppa codes with errors and erasures

S. M. Ratseev^{1✉}, O. I. Cherevatenko²

¹Ulyanovsk State University, 42 Leo Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia

²Ilya Ulyanov State Pedagogical University, 4/5 Ploshchad' Lenina, Ulyanovsk 432071, Russia

Sergey M. Ratseev, ratseevsm@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4995-9418>

Olga I. Cherevatenko, choi2008@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3931-9425>



Abstract. In 1978, McEliece built the first public key cryptosystem based on error-correcting codes. This cryptosystem based on Goppa codes is considered promising and cryptographically stable, taking into account quantum computing. At the same time, effective attacks on the secret keys of this cryptosystem have not yet been found. In the paper, algorithms for decoding Goppa codes in the case of errors and erasures are investigated. Four decoding algorithms based on the algorithms for Reed–Solomon codes proposed by Gao, Berlekamp and Massey, Sugiyama, and others are given. The first two algorithms are based on Gao algorithm and related to syndrome-free decoding algorithms, the rest are related to syndrome decoding algorithms. Moreover, any of these algorithms is also applicable for the case of a communication channel with errors only. Examples of decoding separable Goppa codes using these algorithms are also given.

Keywords: error-correcting codes, Reed–Solomon codes, Goppa codes, code decoding

For citation: Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. Decoding algorithms for Goppa codes with errors and erasures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 28–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-28-47>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Важность исследования кодов Гоппы обусловлена, в частности, тем, что на их основе строятся перспективные постквантовые криптосистемы [1]. Хорошо известно, что некоторые классические коды Гоппы лежат на границе Варшамова–Гильберта.

Определение кода Гоппы [2] опирается на два объекта: многочлен $G(x)$ с коэффициентами из поля $GF(q^m)$, который называется многочленом Гоппы; подмножество $L = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ элементов поля $GF(q^m)$ таких, что $G(\alpha_i) \neq 0$ для всех $\alpha_i \in L$. Код Гоппы $\Gamma(L, G)$ состоит из всех векторов $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ с компонентами из $GF(q)$, для которых

$$R_u = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u_i}{x - \alpha_i} \equiv 0 \pmod{G(x)}.$$

Если $G(x)$ неприводим, то код $\Gamma(L, G)$ называется неприводимым кодом Гоппы. Множество L называется множеством нумераторов позиций кодового слова. Имеют место следующие оценки параметров для кодов Гоппы (см., например, [2, 3]).

Теорема 1. *Параметры $[n, k, d]$ -кода $\Gamma(L, G)$ над полем $GF(q)$, где $L \subseteq GF(q^m)$, связаны соотношением*

$$n = |L|, \quad k \geq n - mr, \quad r = \deg G(x), \quad d \geq r + 1.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, где α_i — различные элементы поля $GF(q^m)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ — ненулевые (не обязательно различные) элементы из $GF(q^m)$. Тогда обобщенный код Рида–Соломона, обозначаемый $GRS_k(\alpha, y)$, состоит из всех кодовых векторов вида

$$u = (y_0 b(\alpha_0), y_1 b(\alpha_1), \dots, y_{n-1} b(\alpha_{n-1})), \quad (1)$$

где $b(x)$ — информационные многочлены над полем $GF(q^m)$ степени не выше $k - 1$.

Нам понадобится следующее утверждение (см., например, [4]).

Теорема 2. *Код $\Gamma(L, G)$ представляет собой ограничение кода $GRS_{n-r}(L, y)$ на подполе $F = GF(q)$: $\Gamma(L, G) = GRS_{n-r}(L, y) \cap F^n$, где $r = \deg G(x)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$,*

$$y_i = G(\alpha_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2)$$



Следствие 1. Проверочная матрица кода $GRS_{n-r}(L, y)$, который задает код $\Gamma(L, G)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{r-1} & \alpha_1^{r-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\alpha_0)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G(\alpha_1)^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G(\alpha_{n-1})^{-1} \end{pmatrix},$$

т. е. совпадает с проверочной матрицей кода $\Gamma(L, G)$.

Таким образом, код $\Gamma(L, G)$ можно задать с помощью обобщенного кода Рида–Соломона (ОРС). Для декодирования кодов Рида–Соломона на случай ошибок хорошо известны следующие алгоритмы [4–6]: алгоритм Гао, алгоритм Сугиямы, алгоритм Берлекэмп–Месси, алгоритм Питерсона–Горенштейна–Цирлера. Для кодов Гоппы подобные алгоритмы рассматривались в работе [7].

Пусть код $\Gamma(L, G)$ является двоичным. Если $G(x)$ не имеет кратных корней, то код $\Gamma(L, G)$ называется сепарабельным кодом Гоппы. Пусть $\overline{G}(x)$ — полный квадрат некоторого многочлена над $GF(2^m)$ наименьшей степени, делящийся на $G(x)$. В случае сепарабельного кода $\overline{G}(x) = G^2(x)$. Для минимального расстояния сепарабельного кода $\Gamma(L, G)$ верна оценка $d \geq 2r + 1$ и выполнено равенство $\Gamma(L, G) = \Gamma(L, \overline{G})$ (см., например, [3]). Эти факты позволяют строить сепарабельный код $\Gamma(L, G) = \Gamma(L, \overline{G})$, а некоторые алгоритмы декодирования кодов Гоппы применять относительно кода $GRS_{n-2r}(\alpha, y)$, $r = \deg G(x)$.

Пусть до конца данной работы $[n, k, d]$ -код $\Gamma(L, G)$ задается на основе ОРС кода: $\Gamma(L, G) = GRS_{n-r}(L, y) \cap F^n$, $F = GF(q)$, $r = \deg G(x)$, $\tilde{k} = n - r$ — размерность кода $GRS_{n-r}(L, y)$ длины n , \overline{H} — проверочная матрица кода $GRS_{n-r}(L, y)$. Пусть d, \tilde{d} — кодовые расстояния соответственно кодов $\Gamma(L, G)$ и $GRS_{n-r}(L, y)$. Так как $d \geq r + 1$, $\tilde{d} = n - \tilde{k} + 1 = r + 1$, то если в кодовом векторе $u \in \Gamma(L, G)$ произошло t ошибок и s стираний, причем $r \geq 2t + s$, для его декодирования можно применять алгоритмы декодирования для ОРС кодов.

Если же код $\Gamma(L, G)$ двоичный и сепарабельный, то $\Gamma(L, G) = GRS_{n-2r}(L, y) \cap F^n$, $F = GF(2)$, $\tilde{k} = n - 2r$ — размерность кода $GRS_{n-2r}(L, y)$, \overline{H} — проверочная матрица кода $GRS_{n-2r}(L, y)$. Также $d \geq 2r + 1$, $\Gamma(L, G^2) \subseteq GRS_{n-2r}(L, y)$, $\tilde{d} = 2r + 1$, поэтому в этом случае алгоритмы декодирования для ОРС кодов можно применять для декодирования вектора u , в котором t ошибок и s стираний, причем $2r \geq 2t + s$.

1. Декодирование кодов Гоппы на основе алгоритма Гао (первый вариант)

Предположим, что в канале связи действуют ошибки и стирания. Пусть кодовый вектор $u \in \Gamma(L, G)$ получен на основе информационного вектора b с помощью правила (1), а после передачи вектора u на приемной стороне получен вектор v , в котором t ошибок и s стираний.

При описании следующего алгоритма будем учитывать работы [5, 8]. Пусть S — позиции стертых символов в векторе v . На основе векторов v, L, y составим соответствующие векторы \tilde{v}, β, z путем удаления всех компонент с номерами из множества S . Рассмотрим код $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ длины $\tilde{n} = n - s$ и размерности \tilde{k} , который получается из кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ путем выкалывания компонент с номерами из множества S .



Для кодового расстояния кода $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ выполнено равенство $\hat{d} = \tilde{n} - \tilde{k} + 1 = n - s - \tilde{k} + 1$. Предположим, что для \hat{d} выполнено неравенство $\hat{d} \geq 2t + 1$. Тогда вектор \tilde{v} , в котором только ошибки, можно декодировать.

На основе компонент вектора β определим многочлен

$$m(x) = (x - \beta_0)(x - \beta_1) \dots (x - \beta_{\tilde{n}-1}).$$

Пусть $X_1 = \beta_{i_1}, \dots, X_t = \beta_{i_t}$ — локаторы ошибок. В данном алгоритме многочлен локаторов ошибок запишем в виде

$$\sigma(x) = (x - X_1) \dots (x - X_t).$$

Если ошибок не было, то будем полагать, что $\sigma(x) = 1$. Пусть \tilde{u} — вектор, полученный из u путем выкалывания компонент с номерами из S . Понятно, что $\tilde{u} \in GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$. Так как $n - \tilde{k} + 1 = d \geq 2t + s + 1$, то $n - s \geq 2t + \tilde{k} \geq \tilde{k}$, поэтому вектор \tilde{u} получен с помощью кодирования информационного многочлена $b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{k-1}x^{k-1}$ (на основе которого получен вектор u) с помощью правила

$$\tilde{u} = (z_0b(\beta_0), z_1b(\beta_1), \dots, z_{\tilde{n}-1}b(\beta_{\tilde{n}-1})).$$

Если $\tilde{v}_i = \tilde{u}_i$, то $\tilde{v}_i = z_i b(\beta_i)$. Если $\tilde{v}_i \neq \tilde{u}_i$, то на позиции i произошла ошибка, поэтому $\sigma(\beta_i) = 0$. Из этого следует, что

$$\sigma(\beta_i)z_i^{-1}\tilde{v}_i = \sigma(\beta_i)b(\beta_i), \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1.$$

Обозначим $p(x) = \sigma(x)b(x)$. Тогда

$$\sigma(\beta_i)z_i^{-1}\tilde{v}_i = p(\beta_i), \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1.$$

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа $f(x)$ степени не выше $\tilde{n} - 1$, проходящий через точки $(\beta_0, z_0^{-1}\tilde{v}_0)$, $(\beta_1, z_1^{-1}\tilde{v}_1), \dots, (\beta_{\tilde{n}-1}, z_{\tilde{n}-1}^{-1}\tilde{v}_{\tilde{n}-1})$:

$$f(\beta_i) = z_i^{-1}\tilde{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1, \quad \deg f(x) \leq \tilde{n} - 1.$$

Тогда из равенств

$$\sigma(\beta_i)f(\beta_i) = p(\beta_i), \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1,$$

получаем сравнение

$$\sigma(x)f(x) \equiv p(x) \pmod{m(x)}. \quad (3)$$

Алгоритм 1 (декодирование кода Гоппы на основе алгоритма Гао на случай ошибок и стираний).

Вход: принятый вектор v .

Выход: исходный кодовый вектор u , в котором произошло s стираний и не более t ошибок, если $r \geq 2t + s$, $r = \deg G(x)$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-r}(L, y)$ (для двоичного сепарабельного кода $2r \geq 2t + s$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-2r}(L, y)$).

1. Пусть S — позиции стертых символов в векторе v . На основе векторов v , L , y составляются соответствующие векторы \tilde{v} , β , z путем удаления всех компонент с номерами из множества S . После этого вектор \tilde{v} рассматривается как вектор, в котором только ошибки и который соответствует некоторому кодовому вектору кода $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ длины $\tilde{n} = n - s$. Определяется многочлен

$$m(x) = \prod_{i=0}^{\tilde{n}-1} (x - \beta_i).$$



2. Интерполяция. Строится интерполяционный многочлен $f(x)$, для которого

$$f(\beta_i) = z_i^{-1} \tilde{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1.$$

3. Незаконченный обобщенный алгоритм Евклида. Пусть $r_{-1}(x) = m(x)$, $r_0(x) = f(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$. Производится последовательность действий обобщенного алгоритма Евклида:

$$\begin{aligned} r_{i-2}(x) &= r_{i-1}(x)q_{i-1}(x) + r_i(x), \\ v_i(x) &= v_{i-2}(x) - v_{i-1}(x)q_{i-1}(x), \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

до тех пор, пока не достигается такого $r_j(x)$, для которого

$$\deg r_{j-1}(x) \geq \frac{\tilde{n} + \tilde{k}}{2}, \quad \deg r_j(x) < \frac{\tilde{n} + \tilde{k}}{2}.$$

4. Деление. Информационный многочлен кода $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$, соответствующий кодовому вектору u , равен $b(x) = \frac{r_j(x)}{v_j(x)}$.

5. Вычисление кодового вектора u с помощью кодирования информационного многочлена $b(x)$ с помощью формулы (1) для кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$:

$$u = (y_0 b(\alpha_0), y_1 b(\alpha_1), \dots, y_{n-1} b(\alpha_{n-1})).$$

Теорема 3. Если в кодовом векторе произошло t ошибок и s стираний, причем $r \geq 2t + s$ ($2r \geq 2t + s$ для двоичного сепарабельного кода), $r = \deg G(x)$, то алгоритм декодирования 1 всегда приводит к единственному решению, а именно к исходному кодовому вектору u кода $\Gamma(L, G)$.

Доказательство. Пусть код $\Gamma(L, G)$ имеет кодовое расстояние $d \geq r + 1$ ($d \geq 2r + 1$ для двоичного сепарабельного кода), $r = \deg G(x)$. Пусть $u \in \Gamma(L, G)$. Так как по теореме 1 код $\Gamma(L, G)$ является ограничением кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ на подполе $GF(q)$, то u можно получить с помощью кодирования некоторого информационного многочлена $b(x)$ кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ с помощью формулы (1). При этом кодовое расстояние кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ равно $\tilde{d} = n - \tilde{k} + 1 = r + 1$ ($\tilde{d} = 2r + 1$ в случае двоичного сепарабельного кода Гоппы). Предположим, что при передаче вектора u произошло t ошибок и s стираний, $r \geq 2t + s$ ($2r \geq 2t + s$), а на приемной стороне получен вектор v . Как и ранее, выколем из векторов u, v, α, y компоненты с номерами стертых компонент вектора v , получив при этом $\tilde{u}, \tilde{v}, \beta$ и z . Теперь \tilde{u} принадлежит коду $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ длины $\tilde{n} = n - s$ и с кодовым расстоянием $\hat{d} = \tilde{n} - \tilde{k} + 1 = n - s + \tilde{k} + 1$. Так как

$$2t + 1 \leq \tilde{d} - s = n - s - \tilde{k} + 1 = \hat{d}, \tag{4}$$

то код $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ может исправить t ошибок в векторе \tilde{v} .

Заметим, что для $\sigma(x)$ и $p(x)$ (истинные значения), которые получены на основе исходных данных, сравнение (3) выполнено, причем $b(x) = p(x)/\sigma(x)$.

Пусть с помощью алгоритма 1 получены значения $r_j(x)$ и $v_j(x)$, причем

$$\deg r_{j-1}(x) \geq \frac{\tilde{n} + \tilde{k}}{2}, \quad \deg r_j(x) < \frac{\tilde{n} + \tilde{k}}{2}.$$



Покажем, что $v_j(x)$ делится на $r_j(x)$, причем $r_j(x)/v_j(x) = b(x)$. Домножив первое из приведенных ниже сравнений:

$$\sigma(x)f(x) \equiv p(x) \pmod{m(x)}, \quad v_j(x)f(x) \equiv r_j(x) \pmod{m(x)},$$

на $v_j(x)$, а второе — на $\sigma(x)$, получим

$$v_j(x)p(x) \equiv \sigma(x)r_j(x) \pmod{m(x)}. \quad (5)$$

Учитывая, что для любого i -го шага обобщенного алгоритма Евклида выполнено

$$\deg v_i(x) = \deg m(x) - \deg r_{i-1}(x),$$

степени многочленов в обеих частях сравнения (5) строго меньше $\tilde{n} = \deg m(x)$. Следовательно, получаем равенство

$$v_j(x)p(x) = \sigma(x)r_j(x).$$

Так как $p(x) = \sigma(x)b(x)$, то $r_j(x) = v_j(x)b(x)$.

Поскольку кодовый вектор \tilde{u} кода $GRS_{\tilde{k}}(\beta, z)$ получен с помощью многочлена $b(x)$, то, учитывая неравенство $n - s \geq \tilde{k}$ из (4), вектор u кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ получен с помощью этого же многочлена. Поэтому исходный кодовый вектор u кода $\Gamma(L, G)$ можно найти на основе кодирования многочлена $b(x)$ кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$ с помощью формулы (1). \square

Задача нахождения интерполяционного многочлена тесно связана с задачей обращения матрицы Вандермонда. В работах [9, 10] приводятся алгоритмы нахождения обратной матрицы со сложностью $O(n^2)$. В работе [11] приводятся точные формулы обратной матрицы Вандермонда через элементарные симметрические многочлены. Приведем эти формулы. Пусть $V = V(a_1, \dots, a_n)$ — матрица Вандермонда:

$$V = V(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

где a_1, \dots, a_n — элементы произвольного поля F . Пусть

$$\sigma_k = \sigma_k(a_1, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

— элементарный симметрический многочлен от a_1, \dots, a_n , $k = 1, \dots, n$. При этом

$$\sigma_0 = \sigma_0(a_1, \dots, a_n) = 1.$$

Также определим

$$\sigma_{k,j} = \sigma_k(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\hat{}$ означает, что элемент пропущен. Тогда (i, j) -й элемент матрицы V^{-1} равен

$$(V^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\sigma_{n-j,i}}{\prod_{k=1}^{i-1} (a_i - a_k) \prod_{k=i+1}^n (a_k - a_i)}. \quad (6)$$



Пример 1. Рассмотрим расширение поля $GF(2) \subset GF(2^4)$. Пусть поле $GF(2^4)$ строится на основе примитивного многочлена $p(x) = x^4 + x + 1$, α — примитивный элемент поля $GF(2^4)$:

$$\begin{array}{llll} \alpha^0 = 1 & & = 1000, & \alpha^1 = \alpha & = 0100, \\ \alpha^2 = & \alpha^2 & = 0010, & \alpha^3 = & \alpha^3 = 0001, \\ \alpha^4 = 1 + \alpha & & = 1100, & \alpha^5 = \alpha + \alpha^2 & = 0110, \\ \alpha^6 = & \alpha^2 + \alpha^3 & = 0011, & \alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3 & = 1101, \\ \alpha^8 = 1 + \alpha^2 & & = 1010, & \alpha^9 = \alpha + \alpha^3 & = 0101, \\ \alpha^{10} = 1 + \alpha + \alpha^2 & & = 1110, & \alpha^{11} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 & = 0111, \\ \alpha^{12} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 & & = 1111, & \alpha^{13} = 1 + \alpha^2 + \alpha^3 & = 1011, \\ \alpha^{14} = 1 + \alpha^3 & & = 1001, & \alpha^{15} = 1 & = 1000. \end{array}$$

Пусть $L = GF(2^4) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14}\}$. Рассмотрим квадратный многочлен $x^2 + x + \alpha^3$. Так как след элемента α^3 в $GF(2^4)$ не равен нулю, то этот многочлен в поле $GF(2^4)$ не имеет корней. Поэтому определим $G(x) = x^2 + x + \alpha^3$. Поскольку многочлен $G(x)$ сепарабельный, то $\Gamma(L, G) = \Gamma(L, \overline{G})$, где $\overline{G}(x) = x^4 + x^2 + \alpha^6$. Проверочная матрица H кода $\Gamma(L, G)$ примет такой вид:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha^{12} & \alpha^{12} & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^9 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^8 & \alpha^9 \\ 0 & \alpha^{12} & \alpha^5 & \alpha^5 & \alpha^{12} & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^{14} & \alpha^{13} & \alpha^{11} & 1 & \alpha^{11} & \alpha^{13} & \alpha^{14} & \alpha^6 & \alpha^8 \end{pmatrix}.$$

После замены каждого элемента матрицы H столбцовым двоичным вектором длины 4, представляющим этот элемент, получим матрицу H_2 размера 8×16 . Так как все строки полученной двоичной матрицы H_2 линейно независимы, то $n - k = 8$, $k = 8$. Выписав построчно фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $H_2 X = O$, находим порождающую матрицу кода $\Gamma(L, G)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для данного $[16, 8]$ -кода кодовое расстояние $d = 5$, поэтому код может исправлять до двух ошибок, либо одну ошибку и до двух стираний, либо до четырех стираний. Рассмотрим случай одной ошибки и двух стираний.

Учитывая теорему 1, код $\Gamma(L, G)$ является ограничением кода $GRS_{12}(L, y)$ на подполе $GF(2)$, где

$$y_i = \overline{G}(\alpha_i) \prod_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} = \overline{G}(\alpha_i), \quad i = 0, 1, \dots, 15,$$

$$y = (\alpha^6, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^7, \alpha^{13}, \alpha^{14}, \alpha^3, \alpha^9, \alpha^3, \alpha^{13}, \alpha^{11}, \alpha^{11}, \alpha^{14}, \alpha^{12}),$$

причем равенство $\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) = 1$ выполнено в силу того, что корнями многочлена $x^{n-1} - 1$ являются все ненулевые элементы поля $GF(2^m)$.



Пусть после кодирования информационного вектора $i = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$ получен кодовый вектор кода $\Gamma(L, G)$

$$u = iG = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1),$$

а на приемном конце получен вектор

$$v = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, *, 1, *, 1, 0, 1),$$

т. е. произошла одна ошибка на 3-й позиции (нумеруя позиции с нуля) и два стирания на 10-й и 12-й позициях. При этом на приемной стороне известны только позиции стираний. Для декодирования вектора v применим алгоритм 1.

1. Удалив в векторе v стертые символы, получим новый вектор

$$\tilde{v} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1),$$

в котором только одна ошибка. Для декодирования данного вектора будем рассматривать код $GRS_{12}(\beta, z)$ длины $\tilde{n} = 14$, β и z — векторы длины 14, которые получаются соответственно из векторов L и y путем удаления 10-й и 12-й компонент:

$$\begin{aligned}\beta &= (0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^{10}, \alpha^{12}, \alpha^{13}, \alpha^{14}), \\ z &= (\alpha^6, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^7, \alpha^{13}, \alpha^{14}, \alpha^3, \alpha^9, \alpha^{13}, \alpha^{11}, \alpha^{14}, \alpha^{12}).\end{aligned}$$

Множество S позиций стертых символов равно $S = \{10, 12\}$. Составляем многочлен $m(x)$:

$$\begin{aligned}m(x) &= \frac{x^{16} - x}{(x - \alpha^9)(x - \alpha^{11})} = \alpha^{10}x + \alpha^7x^2 + \alpha^8x^3 + \alpha x^4 + \alpha^8x^5 + \\ &+ \alpha^3x^6 + \alpha^{14}x^7 + \alpha^4x^8 + \alpha^3x^9 + \alpha^3x^{10} + \alpha^6x^{11} + \alpha^8x^{12} + \alpha^2x^{13} + x^{14}.\end{aligned}$$

Пусть $V = V(\beta)$ — матрица Вандермонда, построенная на основе вектора β , V^{-1} — обратная к ней матрица (построенная, например, с помощью формулы (6)), Z — диагональная матрица на основе вектора z :

$$Z = \text{Diag}(\alpha^6, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^7, \alpha^{13}, \alpha^{14}, \alpha^3, \alpha^9, \alpha^{13}, \alpha^{11}, \alpha^{14}, \alpha^{12}).$$

2. Интерполяция. Вычисляем коэффициенты многочлена $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_{13}x^{13}$:

$$\begin{aligned}(f_0, f_1, \dots, f_{13}) &= \tilde{v}Z^{-1}V^{-1} = (0, \alpha^9, \alpha^8, \alpha^{10}, 0, \alpha^3, \alpha^{13}, \alpha^4, \alpha^7, \alpha^2, \alpha^5, \alpha^4, 0, \alpha^{11}), \\ f(x) &= \alpha^9x + \alpha^8x^2 + \alpha^{10}x^3 + \alpha^3x^5 + \alpha^{13}x^6 + \alpha^4x^7 + \alpha^7x^8 + \alpha^2x^9 + \alpha^5x^{10} + \alpha^4x^{11} + \alpha^{11}x^{13}.\end{aligned}$$

3. Применение неполного обобщенного алгоритма Евклида. Определяем $r_{-1}(x) = m(x)$, $r_0(x) = f(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$ и применяем алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned}r_{-1}(x) &= r_0(x)(\alpha^6 + \alpha^4x) + r_1(x), \\ r_1(x) &= \alpha^5x + \alpha^{12}x^2 + \alpha^3x^3 + \alpha^7x^4 + \alpha^{12}x^5 + \alpha^9x^7 + \alpha^7x^8 + \alpha^4x^9 + \alpha^9x^{10} + x^{11}, \\ v_1(x) &= -(\alpha^6 + \alpha^4x) = \alpha^6 + \alpha^4x.\end{aligned}$$

Так как $(\tilde{n} + \tilde{k})/2 = 13$, $\deg r_0(x) = 13$, $\deg r_1(x) = 11$, то после первого шага алгоритма Евклида останавливаемся.



4. Деление:

$$b(x) = \frac{r_1(x)}{v_1(x)} = \alpha^{14}x + \alpha^4x^2 + \alpha^7x^3 + \alpha^2x^4 + \alpha^{13}x^5 + \alpha^{11}x^6 + \alpha x^7 + \alpha^7x^8 + \alpha^7x^9 + \alpha^{11}x^{10}.$$

5. Вычисление исходного кодового вектора u с помощью кодирования информационного многочлена $b(x)$ в кодовый вектор кода $GRS_{14}(L, y)$:

$$u = (y_0b(0), y_1b(1), y_2b(\alpha), \dots, y_{15}b(\alpha^{14})) = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1).$$

С учетом того, что столбцы матрицы G с номерами 7, 9–15 (нумеруя с нуля) образуют единичную матрицу, из этих позиций вектора u извлекаем информационный вектор $i = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$.

2. Декодирование кодов Гоппы на основе алгоритма Гао (второй вариант)

Пусть кодовый вектор $u \in \Gamma(L, G)$ получен на основе информационного вектора b с помощью правила (1), а после передачи вектора u на приемной стороне получен вектор v , в котором t ошибок и s стираний.

Заменим в векторе v стертые символы, например, нулями. Получим при этом вектор \tilde{v} . Пусть ошибки произошли на позициях i_1, \dots, i_t , а стирания — на позициях i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . Пусть $X_1 = \alpha_{i_1}, \dots, X_t = \alpha_{i_t}$ — неизвестные локаторы ошибок, $X_{t+1} = \alpha_{i_{t+1}}, \dots, X_{t+s} = \alpha_{i_{t+s}}$ — известные локаторы стираний.

Определим многочлен:

$$m(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}).$$

Также определим многочлен локаторов ошибок $\sigma(x)$ и многочлен локаторов стираний $\nu(x)$ следующим образом:

$$\sigma(x) = (x - X_1) \dots (x - X_t), \quad \nu(x) = (x - X_{t+1}) \dots (x - X_{t+s}).$$

Обозначим $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)\nu(x)$. Если ошибок и стираний не было, то будем полагать, что $\tilde{\sigma}(x) = 1$.

Если $\tilde{v}_i = u_i$, то $\tilde{v}_i = y_i b(\alpha_i)$. Если $\tilde{v}_i \neq u_i$, то на позиции i произошла ошибка или стирание, поэтому $\tilde{\sigma}(\alpha_i) = 0$. Из этого следует, что

$$\tilde{\sigma}(\alpha_i) y_i^{-1} \tilde{v}_i = \tilde{\sigma}(\alpha_i) b(\alpha_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Обозначим $\tilde{p}(x) = \tilde{\sigma}(x)b(x)$. Тогда

$$\tilde{\sigma}(\alpha_i) y_i^{-1} \tilde{v}_i = \tilde{p}(\alpha_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа $f(x)$ степени не выше $n-1$, проходящий через точки $(\alpha_0, y_0^{-1}\tilde{v}_0), (\alpha_1, y_1^{-1}\tilde{v}_1), \dots, (\alpha_{n-1}, y_{n-1}^{-1}\tilde{v}_{n-1})$:

$$f(\alpha_i) = y_i^{-1}\tilde{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \deg f(x) \leq n-1.$$



Тогда из равенств

$$\tilde{\sigma}(\alpha_i)f(\alpha_i) = \tilde{p}(\alpha_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

получаем сравнение

$$\tilde{\sigma}(x)f(x) \equiv \tilde{p}(x) \pmod{m(x)}.$$

После обозначения $\tilde{f}(x) = f(x)\nu(x)$ данное сравнение приобретает вид

$$\sigma(x)\tilde{f}(x) \equiv \tilde{p}(x) \pmod{m(x)}. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\deg \sigma(x) \leq \frac{n - \tilde{k} - s}{2}, \quad \deg \tilde{p}(x) < \frac{n + \tilde{k} + s}{2}, \quad (8)$$

так как

$$\deg \sigma(x) \leq t \leq \frac{d - s - 1}{2} = \frac{n - \tilde{k} - s}{2},$$

$$\deg \tilde{p}(x) = \deg \sigma(x) + \deg \nu(x) + \deg b(x) \leq \frac{n - \tilde{k} - s}{2} + s + \tilde{k} - 1 < \frac{n + \tilde{k} + s}{2}.$$

Алгоритм 2 (декодирование кода Гоппы на основе алгоритма Гао на случай ошибок и стираний).

Вход: принятый вектор v .

Выход: исходный кодовый вектор u , в котором произошло s стираний и не более t ошибок, если $r \geq 2t + s$, $r = \deg G(x)$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-r}(L, y)$ (для двоичного сепарабельного кода $2r \geq 2t + s$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-2r}(L, y)$).

1. Определяется $t = \lfloor (d - s - 1)/2 \rfloor$. В векторе v все стирания заменяются нулями, получая тем самым вектор \tilde{v} . Вычисляются значения локаторов стираний $X_{t+1} = \alpha_{i_{t+1}}, \dots, X_{t+s} = \alpha_{i_{t+s}}$ на основе известных позиций стираний i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . Также вычисляется многочлен локаторов стираний $\nu(x) = (x - X_{t+1}) \dots (x - X_{t+s})$.
2. Интерполяция. Строится интерполяционный многочлен $f(x)$, для которого

$$f(\alpha_i) = y_i^{-1}\tilde{v}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Вычисляется многочлен $\tilde{f}(x) = f(x)\nu(x)$.

3. Незаконченный обобщенный алгоритм Евклида. Пусть $r_{-1}(x) = m(x)$, $r_0(x) = \tilde{f}(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$. Производится последовательность действий обобщенного алгоритма Евклида:

$$\begin{aligned} r_{i-2}(x) &= r_{i-1}(x)q_{i-1}(x) + r_i(x), \\ v_i(x) &= v_{i-2}(x) - v_{i-1}(x)q_{i-1}(x), \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

до тех пор, пока не достигается такого $r_j(x)$, для которого

$$\deg r_{j-1}(x) \geq \frac{n + \tilde{k} + s}{2}, \quad \deg r_j(x) < \frac{n + \tilde{k} + s}{2}.$$

4. Деление. Информационный многочлен равен $b(x) = \frac{r_j(x)}{v_j(x)\nu(x)}$.
5. Вычисление кодового вектора u с помощью кодирования информационного многочлена $b(x)$ с помощью формулы (1) для кода $GRS_{\tilde{k}}(L, y)$:

$$u = (y_0b(\alpha_0), y_1b(\alpha_1), \dots, y_{n-1}b(\alpha_{n-1})).$$



Теорема 4. Если в кодовом векторе произошло t ошибок и s стираний, причем $r \geq 2t + s$ ($2r \geq 2t + s$ для двоичного сепарабельного кода), $r = \deg G(x)$, то алгоритм декодирования 2 всегда приводит к единственному решению, а именно к исходному кодовому вектору u и кода $\Gamma(L, G)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Пример 2. Продолжим рассмотрение примера 1. Пусть после кодирования информационного вектора $i = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ получен кодовый вектор кода $\Gamma(L, G)$

$$u = iG = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

а на приемном конце получен вектор

$$v = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, *, 1, *, 0, 1, 1),$$

т. е. произошла одна ошибка на 3-й позиции (нумеруя позиции с нуля) и два стирания на 10-й и 12-й позициях. При этом на приемной стороне известны только позиции стираний. Для декодирования вектора v применим алгоритм 2.

1. Полагаем $s = 2$, $t = [(d - s - 1)/2] = 1$. Заменяв в векторе v стертые символы нулями, получаем $\tilde{v} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$. Также вычисляем многочлен локаторов стираний $\nu(x) = (x - \alpha_{10})(x - \alpha_{12}) = (x - \alpha^9)(x - \alpha^{11}) = \alpha^5 + \alpha^2x + x^2$. Пусть $V = V(L)$ — матрица Вандермонда, построенная на основе вектора L , V^{-1} — обратная к ней матрица, Y — диагональная матрица на основе вектора y .
2. Интерполяция. Вычисляем коэффициенты многочлена $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_{15}x^{15}$:

$$\begin{aligned} (f_0, f_1, \dots, f_{15}) &= \tilde{v}Y^{-1}V^{-1} = \\ &= (0, \alpha^5, \alpha^9, \alpha, \alpha^3, \alpha^2, \alpha^9, \alpha^5, \alpha^4, 0, \alpha^{12}, 1, \alpha^8, \alpha^5, \alpha^{14}, \alpha^4), \\ f(x) &= \alpha^5x + \alpha^9x^2 + \alpha x^3 + \alpha^3x^4 + \alpha^2x^5 + \alpha^9x^6 + \alpha^5x^7 + \alpha^4x^8 + \\ &\quad + \alpha^{12}x^{10} + x^{11} + \alpha^8x^{12} + \alpha^5x^{13} + \alpha^{14}x^{14} + \alpha^4x^{15}. \end{aligned}$$

Вычисляем $\tilde{f}(x) = f(x)\nu(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \alpha^{10}x + \alpha x^2 + \alpha^2x^3 + \alpha^{10}x^4 + \alpha^{12}x^5 + \alpha x^6 + \alpha^{13}x^7 + \alpha^7x^8 + \alpha^9x^9 + \\ &\quad + \alpha^{10}x^{10} + \alpha^{12}x^{11} + \alpha^5x^{12} + x^{13} + \alpha^{13}x^{14} + \alpha^{11}x^{15} + \alpha^8x^{16} + \alpha^4x^{17}. \end{aligned}$$

3. Применение неполного обобщенного алгоритма Евклида. Определяем $r_{-1}(x) = m(x) = x^{16} - x$, $r_0(x) = \tilde{f}(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$ и применяем алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} r_{-1}(x) &= r_0(x)q_0(x) + r_1(x), \\ q_0(x) &= 0, \\ r_1(x) &= x + x^{16}, \\ v_1(x) &= v_{-1}(x) - v_0(x)q_0(x) = 0, \\ r_0(x) &= r_1(x)q_1(x) + r_2(x), \\ q_1(x) &= \alpha^8 + \alpha^4x, \\ r_2(x) &= \alpha x + x^2 + \alpha^2x^3 + \alpha^{10}x^4 + \alpha^{12}x^5 + \alpha x^6 + \alpha^{13}x^7 + \alpha^7x^8 + \alpha^9x^9 + \\ &\quad + \alpha^{10}x^{10} + \alpha^{12}x^{11} + \alpha^5x^{12} + x^{13} + \alpha^{13}x^{14} + \alpha^{11}x^{15}, \\ v_2(x) &= v_0(x) - v_1(x)q_1(x) = 1, \\ r_1(x) &= r_2(x)q_2(x) + r_3(x), \\ q_2(x) &= \alpha^6 + \alpha^4x, \\ r_3(x) &= \alpha^9x + \alpha^9x^2 + \alpha^5x^3 + \alpha^{11}x^4 + x^5 + \alpha^{14}x^6 + \alpha^8x^7 + \alpha^{14}x^8 + \alpha^{12}x^9 + \\ &\quad + \alpha^{12}x^{10} + x^{11} + \alpha^6x^{12} + \alpha^5x^{13}, \\ v_3(x) &= v_1(x) - v_2(x)q_2(x) = \alpha^6 + \alpha^4x. \end{aligned}$$



Так как $(n + \tilde{k} + s)/2 = 15$, $\deg r_2(x) = 15$, $\deg r_3(x) = 13$, то после третьего шага алгоритма Евклида останавливаемся.

4. Деление:

$$b(x) = \frac{r_3(x)}{v_3(x)\nu(x)} = \alpha^{13}x + \alpha^2x^2 + \alpha x^3 + \alpha^{14}x^4 + \alpha^8x^5 + \alpha^3x^6 + \alpha^{10}x^7 + \alpha^2x^8 + \alpha^2x^9 + \alpha x^{10}.$$

5. Вычисление исходного кодового вектора u с помощью кодирования информационного многочлена $b(x)$ в кодовый вектор кода $GRS_{12}(L, y)$:

$$u = (y_0b(0), y_1b(1), y_2b(\alpha), \dots, y_{15}b(\alpha^{14})) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1).$$

С учетом того, что столбцы матрицы G с номерами 7, 9–15 (нумеруя с нуля) образуют единичную матрицу, из этих позиций вектора u извлекаем информационный вектор $i = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$.

3. Декодирование кодов Гоппы на основе алгоритма Сугиямы

Пусть v — полученный на приемной стороне вектор, в котором могут быть ошибки и стирания. Пусть $\tilde{d} \geq 2t + s + 1$. Так как позиции стертых символов известны, то заменим эти символы в векторе v , например, на нули и будем обращаться с полученным вектором \tilde{v} как с вектором, содержащим только ошибки. Пусть ошибки произошли на позициях i_1, \dots, i_t , а стирания — на позициях i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . При этом известны только позиции i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . После того как на данные позиции поместили нули, с какими-то позициями могли угадать (если в кодовом векторе там действительно стояли нули). Поэтому $\tilde{v} = u + e$, где e — вектор ошибок веса не более $t + s$.

Вычисляя синдромный вектор, получаем

$$\begin{aligned} S &= \tilde{v} \overline{H}^T = e \overline{H}^T = (\dots, e_{i_1}, \dots, e_{i_{t+s}}, \dots) \times \\ &\times \left(\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^{n-k-1} & \alpha_1^{n-k-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-k-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} G(\alpha_0)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G(\alpha_1)^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G(\alpha_{n-1})^{-1} \end{array} \right) \right)^T = \\ &= \left(\begin{array}{c} e_{i_1} G(\alpha_{i_1})^{-1} + \dots + e_{i_{t+s}} G(\alpha_{i_{t+s}})^{-1} \\ e_{i_1} G(\alpha_{i_1})^{-1} \alpha_{i_1} + \dots + e_{i_{t+s}} G(\alpha_{i_{t+s}})^{-1} \alpha_{i_{t+s}} \\ \dots \\ e_{i_1} G(\alpha_{i_1})^{-1} \alpha_{i_1}^{n-k-1} + \dots + e_{i_{t+s}} G(\alpha_{i_{t+s}})^{-1} \alpha_{i_{t+s}}^{n-k-1} \end{array} \right)^T. \end{aligned}$$

Пусть $X_1 = \alpha_{i_1}, \dots, X_t = \alpha_{i_t}$ — неизвестные локаторы ошибок, $X_{t+1} = \alpha_{i_{t+1}}, \dots, X_{t+s} = \alpha_{i_{t+s}}$ — известные локаторы стираний, $Y_1 = e_{i_1}, \dots, Y_{t+s} = e_{i_{t+s}}$ — значения ошибок, причем локаторы принадлежат полю $GF(q^m)$, а значения ошибок — полю $GF(q)$. Обозначим $Z_j = Y_j G(\alpha_{i_j})^{-1}$, $j = 1, \dots, t + s$. Тогда

$$\begin{aligned} S_0 &= Z_1 + \dots + Z_t + Z_{t+1} \dots + Z_{t+s}, \\ S_1 &= Z_1 X_1 + \dots + Z_t X_t + Z_{t+1} X_{t+1} + \dots + Z_{t+s} Z_{t+s}, \\ &\dots \\ S_{2t+s-1} &= Z_1 X_1^{2t+s-1} + \dots + Z_t X_t^{2t+s-1} + Z_{t+1} X_{t+1}^{2t+s-1} + \dots + Z_{t+s} X_{t+s}^{2t+s-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Запишем синдромный многочлен в виде

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{i=0}^{2t+s-1} S_i x^i = \sum_{i=0}^{2t+s-1} \left(\sum_{j=1}^{t+s} Z_j X_j^i \right) x^i = \sum_{j=1}^{t+s} Z_j \left(\sum_{i=0}^{2t+s-1} (X_j x)^i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{t+s} Z_j \frac{1 - (X_j x)^{2t+s}}{1 - X_j x} = \sum_{j=1}^{t+s} \frac{Z_j}{1 - X_j x} - x^{2t+s} \sum_{j=1}^{t+s} \frac{Z_j X_j^{2t+s}}{1 - X_j x}. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) &= \prod_{i=1}^{t+s} (1 - X_i x) = \sum_{i=0}^{t+s} \tilde{\sigma}_i x^i, \quad \tilde{\sigma}_0 = 1, \\ \tilde{\omega}(x) &= \sum_{i=1}^{t+s} Z_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq t+s, \\ j \neq i}} (1 - X_j x), \quad \tilde{\Phi}(x) = \sum_{i=1}^{t+s} Z_i X_i^{2t+s} \prod_{\substack{1 \leq j \leq t+s, \\ j \neq i}} (1 - X_j x), \end{aligned}$$

после приведения всех дробей к общему знаменателю получим:

$$S(x) = \frac{\tilde{\omega}(x)}{\tilde{\sigma}(x)} - x^{2t+s} \frac{\tilde{\Phi}(x)}{\tilde{\sigma}(x)}.$$

Тогда

$$S(x)\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\omega}(x) - x^{2t+s}\tilde{\Phi}(x).$$

Данное выражение называют ключевым уравнением, которому можно придать иной вид:

$$\tilde{\sigma}(x)S(x) \equiv \tilde{\omega}(x) \pmod{x^{2t+s}}. \tag{10}$$

Заметим, что $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)\nu(x)$, где $\sigma(x)$ — это многочлен неизвестных локаторов ошибок, $\nu(x)$ — многочлен известных локаторов стираний:

$$\tilde{\sigma}(x) = \prod_{i=1}^t (1 - X_i x) \prod_{i=1}^s (1 - X_{t+i} x) = \sigma(x)\nu(x).$$

Введем в рассмотрение многочлен $\tilde{S}(x) = S(x)\nu(x)$ — модифицированный синдромный многочлен. Тогда ключевое уравнение (10) примет вид

$$\sigma(x)\tilde{S}(x) \equiv \tilde{\omega}(x) \pmod{x^{2t+s}}, \tag{11}$$

где

$$\deg \sigma(x) \leq t, \quad \deg \tilde{\omega}(x) \leq t + s - 1, \quad \sigma(0) = 1. \tag{12}$$

Алгоритм 3 (декодирование кода Гоппы на основе алгоритма Сугиямы на случай ошибок и стираний).

Вход: принятый вектор v .

Выход: исходный кодовый вектор u , в котором произошло s стираний и не более t ошибок, если $r \geq 2t + s$, $r = \deg G(x)$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-r}(L, y)$ (для двоичного сепарабельного кода $2r \geq 2t + s$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-2r}(L, y)$).



1. Определяется $t = \lfloor (r - s)/2 \rfloor$ ($t = \lfloor (2r - s)/2 \rfloor$ в случае двоичного сепарабельного кода Гоппы). В векторе v все стирания заменяются нулями, получая тем самым вектор \tilde{v} . Находятся компоненты $S_0, S_1, \dots, S_{2t+s-1}$ синдромного вектора $\tilde{v}\bar{H}^T$. Если они все равны нулю, то возвращается вектор \tilde{v} и процедура окончена. Вычисляются значения локаторов стираний $X_{t+1} = \alpha_{i_{t+1}}, \dots, X_{t+s} = \alpha_{i_{t+s}}$ на основе известных позиций стираний i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . Вычисляются коэффициенты модифицированного синдромного многочлена $\tilde{S}(x)$.
2. Пусть $r_{-1}(x) = x^{2t+s}$, $r_0(x) = \tilde{S}(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$. С помощью обобщенного алгоритма Евклида производится последовательность вычислений ($i \geq 1$):

$$\begin{aligned} r_{i-2}(x) &= r_{i-1}(x)q_{i-1}(x) + r_i(x), \\ v_i(x) &= v_{i-2}(x) - v_{i-1}(x)q_{i-1}(x). \end{aligned}$$

Процесс прекращается, как только для некоторого $r_j(x)$ будет выполнено

$$\deg r_{j-1}(x) \geq t + s, \quad \deg r_j(x) \leq t + s - 1.$$

Тогда

$$\sigma(x) = \lambda v_j(x), \quad \tilde{\omega}(x) = \lambda r_j(x),$$

где константа $\lambda \in GF(q^m)$ задается так, чтобы удовлетворялось условие $\sigma(0) = 1$. Пусть $l = \deg \sigma(x)$.

3. Отыскиваются l корней многочлена $\sigma(x)$ последовательной подстановкой в него ненулевых элементов поля $GF(q^m)$. При этом локаторы ошибок — это величины, обратные корням многочлена $\sigma(x)$.
4. При вычислении значений ошибок выполняется один из следующих пунктов.
 - 4.1. Если среди локаторов стираний X_{t+1}, \dots, X_{t+s} имеется нулевое значение (в противном случае переходим в пункт 4.2), скажем, $X_p = 0$, то пусть

$$M = \{1, \dots, l\} \cup \{t + 1, \dots, t + s\} \setminus \{p\}$$

— множество индексов локаторов ошибок и стираний без учета индекса p . Находятся Z_j , $j \in M$, например, с помощью алгоритма Форни для обобщенных кодов РС:

$$Z_j = \frac{\tilde{\omega}(X_j^{-1})}{\prod_{i \in M \setminus \{j\}} (1 - X_i X_j^{-1})}, \quad j \in M. \quad (13)$$

После этого находятся значения ошибок $Y_j = Z_j G(X_j)$, $j \in M$. У вектора \tilde{v} из i_j -го символа, $X_j = \alpha_{i_j}$, вычитается значение Y_j , $j \in M$. При этом получается вектор \tilde{u} . Пусть для некоторого i выполнено $\alpha_i = 0$ (в противном случае все локаторы стираний были бы ненулевыми). Вычисляется значение Z_p , равное скалярному произведению вектора \tilde{u} на первую строку матрицы \bar{H} . Вычисляется значение ошибки $Y_p = Z_p G(\alpha_i)$. Осталось в векторе \tilde{u} из i -го символа вычесть Y_p .

4.2. Если условие 4.1 не выполнено, то пусть $M = \{1, \dots, l\} \cup \{t + 1, \dots, t + s\}$. По формуле (13) находятся значения Z_j , затем значения ошибок $Y_j = Z_j G(X_j)$, $j \in M$. У вектора \tilde{v} из i_j -го символа, $X_j = \alpha_{i_j}$, вычитается значение Y_j , $j \in M$. При этом получается вектор \tilde{u} .

Если $\alpha_i = 0$ для некоторого i , то вычисляется значение Z_0 , равное скалярному произведению вектора \tilde{u} на первую строку матрицы \bar{H} . Если $Z_0 \neq 0$, то вычисляется значение ошибки $Y_0 = Z_0 G(\alpha_i)$. Осталось в векторе \tilde{u} из i -го символа вычесть Y_0 .

Теорема 5. Если в кодовом векторе $u \in \Gamma(L, G)$ произошло t ошибок и s стираний, причем $r \geq 2t + s$ ($2r \geq 2t + s$ в случае двоичного сепарабельного кода Гоппы), $r = \deg G(x)$, то алгоритм декодирования 3 всегда приводит к единственному решению, а именно к исходному кодовому вектору u кода $\Gamma(L, G)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(L, G) = GRS_{\tilde{k}}(L, y) \cap F^n$. Из неравенства $r \geq 2t + s$ ($2r \geq 2t + s$) следует, что $\tilde{d} \geq 2t + s + 1$. Поэтому для декодирования вектора $u \in \Gamma(L, G)$ можно применить любой алгоритм декодирования для ОРС кодов, так как $u \in GRS_{\tilde{k}}(L, y)$. В этом случае остается применить теорему 4 из работы [12]. \square

Пример 3. Продолжим рассмотрение примеров 1 и 2. В данном случае $\Gamma(L, G) \subseteq GRS_{12}(L, y)$, при этом проверочная матрица \overline{H} кода $GRS_{12}(L, y)$, учитывая следствие 1, имеет вид

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} \alpha^9 & \alpha^9 & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^3 & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^{12} & \alpha^6 & \alpha^{12} & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^4 & \alpha & \alpha^3 \\ 0 & \alpha^9 & \alpha^9 & \alpha^8 & \alpha^6 & \alpha^{12} & \alpha^7 & \alpha^7 & \alpha^4 & \alpha^{14} & \alpha^6 & \alpha^{12} & 1 & \alpha & \alpha^{14} & \alpha^2 \\ 0 & \alpha^9 & \alpha^{10} & \alpha^{10} & \alpha^9 & \alpha & \alpha^{12} & \alpha^{13} & \alpha^{11} & \alpha^7 & 1 & \alpha^7 & \alpha^{11} & \alpha^{13} & \alpha^{12} & \alpha \\ 0 & \alpha^9 & \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{12} & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^3 & 1 & \alpha^9 & \alpha^2 & \alpha^7 & \alpha^{10} & \alpha^{10} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и ранее, на приемном конце получен вектор

$$v = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, *, 1, *, 1, 0, 1),$$

в котором одна ошибка и два стирания. Применим к этому вектору алгоритм декодирования 3.

1. Пусть $s = 2$, $t = [(2r - s)/2] = 1$. Заменяя стертые символы на 0, получим вектор \tilde{v} :

$$\tilde{v} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Найдем компоненты синдромного вектора $\tilde{v}\overline{H}^T$:

$$(S_0, S_1, S_2, S_3) = (\alpha^{12}, \alpha^2, \alpha^{14}, \alpha^2).$$

Вычисляем известные локаторы стираний:

$$X_2 = \alpha_{10} = \alpha^9, \quad X_3 = \alpha_{12} = \alpha^{11}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x) &= S(x)\nu(x) = (\alpha^{12} + \alpha^2x + \alpha^{14}x^2 + \alpha^2x^3)(1 - \alpha^9x)(1 - \alpha^{11}x) = \\ &= \alpha^{12} + \alpha^{13}x + \alpha^{11}x^2 + \alpha^{13}x^3 + \alpha^7x^5. \end{aligned}$$

2. Определяем $r_{-1}(x) = x^4$, $r_0(x) = \tilde{S}(x)$, $v_{-1}(x) = 0$, $v_0(x) = 1$. Выполняем неполный алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} r_{-1}(x) &= r_0(x)q_0(x) + r_1(x), \\ q_0(x) &= 0, \\ r_1(x) &= x^4, \\ v_1(x) &= v_{-1}(x) - q_0(x)v_0(x) = 0, \\ r_0(x) &= r_1(x)q_1(x) + r_2(x), \\ q_1(x) &= \alpha^7x, \\ r_2(x) &= \alpha^{12} + \alpha^{13}x + \alpha^{11}x^2 + \alpha^{13}x^2, \\ v_2(x) &= v_0(x) - q_1(x)v_1(x) = 1, \\ r_1(x) &= r_2(x)q_2(x) + r_3(x), \\ q_2(x) &= 1 + \alpha^2x, \\ r_3(x) &= \alpha^{12} + \alpha^2x + \alpha^{12}x^2, \\ v_3(x) &= v_1(x) - q_2(x)v_2(x) = 1 + \alpha^2x. \end{aligned}$$



Так как $t + s = 3$, $\deg r_2(x) = 3$, $\deg r_3(x) < 3$, то после третьего шага останавливаемся. Тогда

$$\sigma(x) = \lambda v_3(x), \quad \tilde{\omega}(x) = \lambda r_3(x).$$

При $\lambda = 1$ получаем $\sigma(0) = 1$, поэтому

$$\sigma(x) = 1 + \alpha^2 x, \quad \tilde{\omega}(x) = \alpha^{12} + \alpha^2 x + \alpha^{12} x^2.$$

3. Корнем многочлена $\sigma(x)$ является $x_1 = \alpha^{13}$, поэтому $X_1 = x_1^{-1} = \alpha^2 = \alpha_3$. Это значит, что ошибка произошла на 3-й позиции. Итак, на 3-й позиции вектора \tilde{v} точно имеется ошибка, а на позициях 10 и 12, возможно, есть ошибки (после замены стертых символов нулями мы могли поставить некоторые символы верно).
4. Так как среди локаторов стираний нет нулевых значений, то переходим к пункту 4.2 алгоритма 3 декодирования. Поскольку код $\Gamma(L, G)$ двоичный, то $Y_1 = 1$. Найдем Y_2 и Y_3 . Используем алгоритм Форни:

$$Z_2 = \frac{\tilde{\omega}(X_2^{-1})}{(1 - X_1 X_2^{-1})(1 - X_3 X_2^{-1})} = 0, \quad Y_2 = Z_2 G(\alpha_{10}) = 0,$$

$$Z_3 = \frac{\tilde{\omega}(X_3^{-1})}{(1 - X_1 X_3^{-1})(1 - X_2 X_3^{-1})} = \alpha^4, \quad Y_3 = Z_3 G(\alpha_{12}) = 1.$$

Таким образом, в векторе \tilde{v} две ошибки — на 3-й и 12-й позициях. Поэтому

$$\tilde{u} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1).$$

Так как $\alpha_0 = 0$, то проверяем, была ли ошибка на 0-й позиции. Скалярное произведение вектора \tilde{u} на первую строку матрицы \overline{H} дает ноль, поэтому исходный кодовый вектор равен $u = \tilde{u}$.

4. Декодирование кодов Гоппы на основе алгоритма Берлекэмпа – Мессе

Продолжим рассмотрение сравнения (11). Пусть v — полученный на приемной стороне вектор, в котором могут быть ошибки и стирания. Пусть t — максимальное число возможных ошибок при фиксированном числе стираний s в векторе v , $\tilde{d} \geq 2t + s + 1$, $t = [(\tilde{d} - s - 1)/2]$, m — реальное число ошибок, $m \leq t$. В этом случае $\deg \omega(x) \leq m + s - 1$, и необходимым условием выполнения данного сравнения является то, что коэффициент многочлена $\sigma(x)\tilde{S}(x)$ при x^i , $i = m + s, m + s + 1, \dots, 2t + s - 1$, равен нулю. Учитывая, что $\sigma_0 = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_0 \tilde{S}_{s+m} + \sigma_1 \tilde{S}_{s+m-1} + \dots + \sigma_m \tilde{S}_s = 0, \\ \sigma_0 \tilde{S}_{s+m+1} + \sigma_1 \tilde{S}_{s+m} + \dots + \sigma_m \tilde{S}_{s+1} = 0, \\ \dots \\ \sigma_0 \tilde{S}_{s+2t-1} + \sigma_1 \tilde{S}_{s+2t-2} + \dots + \sigma_m \tilde{S}_{s+2t-m-1} = 0. \end{cases}$$

Запишем данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{s+m-1} & \tilde{S}_{s+m-2} & \dots & \tilde{S}_s \\ \tilde{S}_{s+m} & \tilde{S}_{s+m-1} & \dots & \tilde{S}_{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{S}_{s+2t-2} & \tilde{S}_{s+2t-3} & \dots & \tilde{S}_{s+2t-m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{S}_{s+m} \\ -\tilde{S}_{s+m+1} \\ \dots \\ -\tilde{S}_{s+2t-1} \end{pmatrix}. \quad (14)$$



Удалив в системе (14) $2t - 2m$ последних уравнений, получим новую систему с квадратной матрицей системы порядка m . Матрицу данной системы обозначим через $M(m, s)$.

Теорема 6. Пусть произошло s стираний. Матрица $M(m, s)$ невырождена тогда и только тогда, когда произошло m ошибок.

Доказательство следует из теоремы 5 работы [12].

Для нахождения решения системы (14) применим следующий алгоритм.

Алгоритм 4 (алгоритм Берлекэмпа–Мессе)

Вход: последовательность a_1, \dots, a_n над некоторым полем.

Выход: LFSR $(L, f(x))$ минимальной длины L , для которого

$$-a_j = \sum_{i=1}^L f_i a_{j-i}, \quad j = L + 1, L + 2, \dots, n.$$

1. Определить $r := 0$, $f(x) := 1$, $b(x) := 1$, $L := 0$.

2. Цикл $r := 1, \dots, n$

2.1. Определить $\Delta := a_r + \sum_{i=1}^L f_i a_{r-i}$.

2.2. Если $\Delta = 0$, то $b(x) := x \cdot b(x)$.

2.3. Если $\Delta \neq 0$:

2.3.1. Если $2L < r$:

$$buf(x) := f(x) - \Delta \cdot x \cdot b(x),$$

$$b(x) := \Delta^{-1} \cdot f(x),$$

$$f(x) := buf(x),$$

$$L := r - L.$$

2.3.2. Иначе (т. е. выполнено $2L \geq r$):

$$f(x) := f(x) - \Delta \cdot x \cdot b(x),$$

$$b(x) := x \cdot b(x).$$

Теорема 7. Пусть $\tilde{d} \geq 2t + s + 1$. Если на вход алгоритма 4 подать последовательность $\tilde{S}_s, \tilde{S}_{s+1}, \dots, \tilde{S}_{s+2t-1}$, то на выходе алгоритма будет верное значение многочлена локаторов ошибок $\sigma(x)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\sigma}(x)$ — многочлен, полученный после применения алгоритма 4. Так как коэффициенты многочлена локаторов ошибок $\sigma(x)$ являются решением системы (14), то по свойству алгоритма Берлекэмпа–Мессе будет выполнено неравенство $L \leq m$ (в данном случае L — длина регистра). Удалив в системе (14) $2t - 2m$ последних уравнений, получим новую систему с квадратной матрицей системы порядка m . Из теоремы 6 следует, что данная матрица невырождена, поэтому полученная новая система имеет единственное решение. Это значит, что $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)$. \square

Алгоритм 5 (декодирование кода Гоппы на основе алгоритма Берлекэмпа–Мессе на случай ошибок и стираний).

Вход: принятый вектор v .

Выход: исходный кодовый вектор u , в котором произошло s стираний и не более t ошибок, если $r \geq 2t + s$, $r = \deg G(x)$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-r}(L, y)$ (для двоичного сепарабельного кода $2r \geq 2t + s$, $u \in \Gamma(L, G) \subseteq GRS_{n-2r}(L, y)$).



1. Определяется $t = \lfloor (r - s)/2 \rfloor$ ($t = \lfloor (2r - s)/2 \rfloor$ в случае двоичного сепарабельного кода Гоппы). В векторе v все стирания заменяются нулями, получая тем самым вектор \tilde{v} . Находятся компоненты $S_0, S_1, \dots, S_{2t+s-1}$ синдромного вектора $\tilde{v}\overline{H}^T$. Если они все равны нулю, то возвращается вектор \tilde{v} и процедура окончена. Вычисляются значения локаторов стираний $X_{t+1} = \alpha_{i_{t+1}}, \dots, X_{t+s} = \alpha_{i_{t+s}}$ на основе известных позиций стираний i_{t+1}, \dots, i_{t+s} . Вычисляются коэффициенты модифицированного синдромного многочлена $\tilde{S}(x)$.
2. На вход алгоритма 4 подается последовательность $\tilde{S}_s, \tilde{S}_{s+1}, \dots, \tilde{S}_{s+2t-1}$. На выходе данного алгоритма получается многочлен $\sigma(x)$. Пусть $l = \deg \sigma(x)$.
3. Отыскиваются l корней многочлена $\sigma(x)$ последовательной подстановкой в него ненулевых элементов поля $GF(q^m)$. При этом локаторы ошибок — это величины, обратные корням многочлена $\sigma(x)$.
4. При вычислении значений ошибок выполняется один из следующих пунктов.
 - 4.1. Если среди локаторов стираний X_{t+1}, \dots, X_{t+s} имеется нулевое значение (в противном случае переходим в пункт 4.2), скажем, $X_p = 0$, то пусть

$$M = \{1, \dots, l\} \cup \{t + 1, \dots, t + s\} \setminus \{p\}$$

— множество индексов локаторов ошибок и стираний без учета индекса p . Находятся $Z_j, j \in M$, например, с помощью алгоритма Форни (13) для обобщенных кодов РС. После этого находятся значения ошибок $Y_j = Z_j G(X_j), j \in M$. У вектора \tilde{v} из i_j -го символа, $X_j = \alpha_{i_j}$, вычитается значение $Y_j, j \in M$. При этом получается вектор \tilde{u} . Пусть для некоторого i выполнено $\alpha_i = 0$ (в противном случае все локаторы стираний были бы ненулевыми). Вычисляется значение Z_p , равное скалярному произведению вектора \tilde{u} на первую строку матрицы \overline{H} . Вычисляется значение ошибки $Y_p = Z_p G(\alpha_i)$. Осталось в векторе \tilde{u} из i -го символа вычесть Y_p .

4.2. Если условие 4.1 не выполнено, то пусть $M = \{1, \dots, l\} \cup \{t + 1, \dots, t + s\}$. По формуле (13) находятся значения Z_j , затем значения ошибок $Y_j = Z_j G(X_j), j \in M$. У вектора \tilde{v} из i_j -го символа, $X_j = \alpha_{i_j}$, вычитается значение $Y_j, j \in M$. При этом получается вектор \tilde{u} .

Если $\alpha_i = 0$ для некоторого i и $\deg \sigma(x)$ строго меньше длины LFSR (полученного на выходе алгоритма 4), то вычисляется значение Z_0 , равное скалярному произведению вектора \tilde{u} на первую строку матрицы \overline{H} , а затем вычисляется значение ошибки $Y_0 = Z_0 G(\alpha_i)$. Осталось в векторе \tilde{u} из i -го символа вычесть Y_0 .

Пример 4. Продолжим рассматривать примеры 1, 2 и 3. Пусть на приемной стороне получен все тот же вектор $v = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, *, 1, *, 1, 0, 1)$. После замены стертых символов нулями получаем вектор $\tilde{v} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$. Компоненты синдромного вектора \tilde{S} вычислены в предыдущем примере: $\tilde{S}_0 = \alpha^{12}, \tilde{S}_1 = \alpha^{13}, \tilde{S}_2 = \alpha^{11}, \tilde{S}_3 = \alpha^{13}, \tilde{S}_4 = \alpha^7$. Определяем $s = 2, t = \lfloor (2r - s)/2 \rfloor = 1$. На вход алгоритма 4 подаем последовательность $\tilde{S}_2 = \alpha^{11}, \tilde{S}_3 = \alpha^{13}$. Получаем $\sigma(x) = 1 + \alpha^2 x, L = 2$. Многочлен $\tilde{\omega}(x)$ можно найти из сравнения $\tilde{\omega}(x) \equiv \sigma(x)\tilde{S}(x) \pmod{x^4}$. После этого осталось повторить шаги 3 и 4 предыдущего примера.

Список литературы

1. Status Report on the First Round of the NIST Post-Quantum Cryptography Standardization Process. National Institute of Standards and Technology. Internal Report 8240. January, 2019. 27 p. <https://doi.org/10.6028/NIST.IR.8240>



2. Гоппа В. Д. Новый класс линейных корректирующих кодов // Проблемы передачи информации. 1970. Т. 6, № 3. С. 24–30.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки : пер. с англ. Москва : Связь, 1979. 744 с.
4. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / пер. с англ. И. И. Грушко, В. М. Блиновский ; под ред. К. Ш. Зигангирова. Москва : Мир, 1986. 576 с.
5. Gao S. A new algorithm for decoding Reed–Solomon codes // Communications, Information and Network Security / eds.: V. Bhargava, H. V. Poor, V. Tarokh, S. Yoon. Norwell, MA : Kluwer, 2003. Vol. 712. P. 55–68.
6. Huffman W. C., Pless V. Fundamentals of Error-Correcting Codes. New York ; Cambridge : Cambridge University Press, 2003. 646 p.
7. Рацеев С. М. Элементы высшей алгебры и теории кодирования : учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург : Лань, 2022. 656 с.
8. Федоренко С. В. Простой алгоритм декодирования алгебраических кодов // Информационно-управляющие системы. 2008. № 3. С. 23–27.
9. Gohberg I., Olshevsky V. The fast generalized Parker–Traub algorithm for inversion of Vandermonde and related matrices // Journal of Complexity. 1997. Vol. 13, iss. 2. P. 208–234. <https://doi.org/10.1006/jcom.1997.0442>
10. Yan S., Yang A. Explicit algorithm to the inverse of Vandermonde matrix // 2009 International Conference on Test and Measurement. Hong Kong, 2009. P. 176–179. <https://doi.org/10.1109/ICTM.2009.5413083>
11. Rawashdeh E. A. A simple method for finding the inverse matrix of Vandermonde matrix // МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК. 2019. Vol. 71, № 3. P. 207–213.
12. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Об алгоритмах декодирования обобщенных кодов Рида–Соломона на случай ошибок и стираний // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 26, № 3. С. 17–29. <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-17-29>

References

1. Status Report on the First Round of the NIST Post-Quantum Cryptography Standardization Process. National Institute of Standards and Technology. Internal Report 8240. January, 2019. 27 p. <https://doi.org/10.6028/NIST.IR.8240>
2. Goppa V. D. A New Class of Linear Correcting Codes. *Problems of Information Transmission*, 1970, vol. 6, iss. 3, pp. 207–212.
3. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. *The Theory of Error Correcting Codes*. Amsterdam, New York, North-Holland Pub. Co, 1977. 762 p. (Russ. ed.: Moscow, Sviaz', 1979. 744 p.).
4. Blahut R. E. *Theory and Practice of Error Control Codes*. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1983. 500 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 576 p.).
5. Gao S. A new algorithm for decoding Reed–Solomon codes. In: V. Bhargava, H. V. Poor, V. Tarokh, S. Yoon, eds. *Communications, Information and Network Security*. Norwell, MA, Kluwer, 2003, vol. 712, pp. 55–68.
6. Huffman W. C., Pless V. *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. New York, Cambridge, Cambridge University Press, 2003. 646 p.
7. Ratseev S. M. *Elementy vysshei algebry i teorii kodirovaniya* [Elements of Higher Algebra and Coding Theory]. St. Petersburg, Lan', 2022. 656 p. (in Russian).
8. Fedorenko S. V. Simple algorithm for decoding algebraic codes. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2008, no. 3, pp. 23–27 (in Russian).



9. Gohberg I., Olshevsky V. The fast generalized Parker–Traub algorithm for inversion of Vandermonde and related matrices. *Journal of Complexity*, 1997, vol. 13, iss. 2, pp. 208–234. <https://doi.org/10.1006/jcom.1997.0442>
10. Yan S., Yang A. Explicit algorithm to the inverse of Vandermonde matrix. *2009 International Conference on Test and Measurement*. Hong Kong, 2009, pp. 176–179. <https://doi.org/10.1109/ICTM.2009.5413083>
11. Rawashdeh E. A. A simple method for finding the inverse matrix of Vandermonde matrix. *МАТЕМАТИЌКИ VESNIK*, 2019, vol. 71, no. 3, pp. 207–213.
12. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. On decoding algorithms for generalized Reed–Solomon codes with errors and erasures. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvoenno-nauchnaia seriia* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2020, vol. 26, no. 3, pp. 17–29 (in Russian). <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-17-29>

Поступила в редакцию / Received 25.08.2021

Принята к публикации / Accepted 28.09.2021

Опубликована / Published 31.03.2022

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 48–61

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 48–61

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

Научная статья

УДК 539.3

Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений

А. Ш. Джабраилов^{1✉}, А. П. Николаев¹,
Ю. В. Клочков¹, Н. А. Гуреева², Т. Р. Ищанов¹

¹Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, просп. Университетский, д. 26

²Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, г. Москва, Ленинградский просп., д. 49

Джабраилов Арсен Шахназович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, arsen82@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6494-1377>

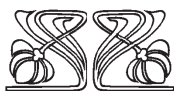
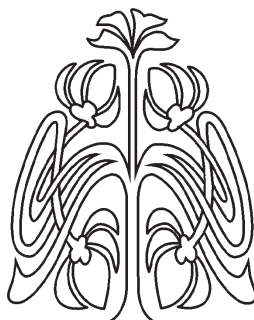
Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>

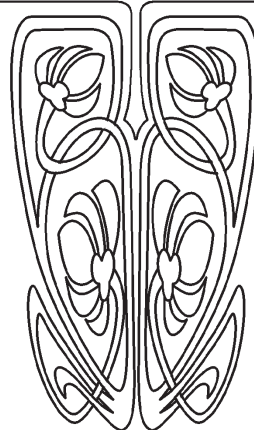
Гуреева Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>

Ищанов Глек Рахметолович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, ishchanov.volgau@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2137-4269>

Аннотация. Использован криволинейный конечный элемент срединной линии осесимметрично нагруженной оболочки вращения с матрицей жесткости размером 8×8 при выборе узловых неизвестных в виде перемещений и их первых производных. Определяющие уравнения на шаге нагружения реализованы в двух вариантах. В первом варианте использованы соотношения деформационной теории пластичности, состоящие из выражений упругих и пластических частей. Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений определялись дифференцированием используемых уравнений. Во втором варианте гипотеза о разделении деформации



Научный
отдел





на упругую и пластическую части не использовалась. Разработанные авторами определяющие уравнения получены на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений напряжений и компонент девиаторов приращений деформаций с коэффициентом пропорциональности в виде функции хордового модуля диаграммы деформирования. Представлен пример расчета, показывающий эффективность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: оболочка вращения, тензор деформаций, вектор перемещения, конечный элемент, шаг нагружения, физическая нелинейность, напряжение

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Волгоградской области (проект № 19-41-340002р_а).

Для цитирования: Джабраилов А. Ш., Николаев А. П., Клочков Ю. В., Гуреева Н. А., Ищанов Т. Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 48–61. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on FEM with different variants of definitional equations

A. Sh. Dzhabrailov¹✉, A. P. Nikolaev¹, Yu. V. Klochkov¹,
N. A. Gureeva², T. R. Ishchanov¹

¹Volgograd State Agricultural University, 26 Universitetskiy pr., Volgograd 400002, Russia

²Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, Moscow 125993, Russia

Arsen Sh. Dzhabrailov, arsen82@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6494-1377>

Anatoly P. Nikolaev, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>

Yuri V. Klochkov, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>

Natalia A. Gureeva, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>

Tlek R. Ishchanov, ishchanov.volgau@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2137-4269>

Abstract. A curvilinear finite element of the median line of an axisymmetrically loaded shell of revolution with a stiffness matrix of 8×8 size is used when choosing nodal unknowns in the form of displacements and their first derivatives is used. The constitutive equations at the loading step are implemented in two versions. In the first version, the relations of the deformation theory of plasticity are used, which consist of expressions for the elastic and plastic parts. The relationships between strain increments and stress increments were determined by differentiating the equations used. In the second version, the hypothesis of separation of the deformation into elastic and plastic parts was not used. The constitutive equations developed by the authors are obtained on the basis of the hypothesis of the proportionality of the components of the deviators of the stress increments and the components of the deviators of the increments of deformations with the coefficient of proportionality as a function of the chord modulus of the deformation diagram. An example of calculation showing the effectiveness of the developed algorithm is presented.



Keywords: shell of revolution, strain tensor, displacement vector, finite element, loading step, physical nonlinearity, stress

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region (project No. 19-41-340002).

For citation: Dzhabrailov A. Sh., Nikolaev A. P., Klochkov Yu. V., Gureeva N. A., Ishchanov T. R. Nonlinear deformation of axisymmetrically loaded rotation shell based on FEM with different variants of definitional equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 48–61 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В настоящее время расчеты тонкостенных конструкций опираются на достаточно развитую теорию оболочек [1–7]. В современных технологических реалиях значительно возрастает необходимость наиболее полного использования прочностных свойств материалов, которые должны обеспечивать устойчивую работу оболочечной конструкции даже при достижении предельных нагрузок. Действие этих нагрузок носит ярко выраженный местный характер, что в свою очередь может привести к возникновению пластических деформаций. Учет физической нелинейности применяемого материала, несомненно, приводит к более экономичным решениям, позволяя эффективно оценить работу конструкции [8–13]. В расчетах за пределами упругости широко используется деформационная теория пластичности с разделением деформации на упругую и пластическую части. Соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения определяются дифференцированием определяющих уравнений деформационной теории пластичности с принятием неизменности объема при пластическом деформировании. При выводе определяющих уравнений в настоящей работе предложена гипотеза о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений, на основе которой коэффициент пропорциональности получен в виде функции хордового модуля диаграммы деформирования. В разработанном варианте получения определяющих уравнений на шаге нагружения исключена операция деления деформации на упругую и пластическую части, что позволило значительно упростить алгоритм формирования определяющих уравнений.

1. Материалы и методы

1.1. Основные соотношения

В процессе деформирования рассматриваются три положения точки срединной линии продольного сечения оболочки вращения: исходное (точка H^0), после j шагов нагружения (точка H , вектор перемещения \mathbf{v}) и после $(j + 1)$ шага (точка H^* , вектор перемещения $\Delta\mathbf{v}$). Соответствующие точки, отстоящие на расстоянии ζ от срединной поверхности, обозначаются символами $H^{0\zeta}$, H^ζ и $H^{*\zeta}$.

Положение точки H^0 оболочки вращения описывается радиус-вектором

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r\mathbf{k}, \quad (1)$$



где x — осевая координата, r — радиус вращения, являющийся функцией от x , \mathbf{i} , \mathbf{k} — орты декартовой системы координат.

Вектор локального базиса, касательный к срединной линии продольного сечения оболочки, можно получить дифференцированием (1) по криволинейной координате s :

$$\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{R}_{,s}^0 = (\mathbf{i} + r_{,x}\mathbf{k})_{x,s}. \quad (2)$$

Орт нормали к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{j} = -r_{,x}x_s\mathbf{i} + x_s\mathbf{k}. \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m^0] \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ 2 \times 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m^0]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $\{\mathbf{e}^0\}^T = \{\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}^0\}$; $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{ik}\}$.

Дифференцированием (2) и (3) с учетом (4) можно сформировать матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{,s}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [m_{,s}^0] [m^0]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [n] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^0 \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Рассматриваемые положения произвольной точки оболочки вращения при учете гипотезы прямой нормали можно описать следующими радиус-векторами (рис. 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{0\zeta} &= \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{e}^0, & \mathbf{R} &= \mathbf{R}^0 + \mathbf{v}, & \mathbf{R}^* &= \mathbf{R} + \Delta \mathbf{v}, \\ \mathbf{R}^\zeta &= \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{e} - \mathbf{e}^0), & \mathbf{R}^{*\zeta} &= \mathbf{R}^\zeta + \Delta \mathbf{v} + \zeta(\mathbf{e}^* - \mathbf{e}), \end{aligned} \quad (6)$$

где \mathbf{e} и \mathbf{e}^* — орты нормалей к срединной поверхности оболочки в точках H и H^* соответственно.

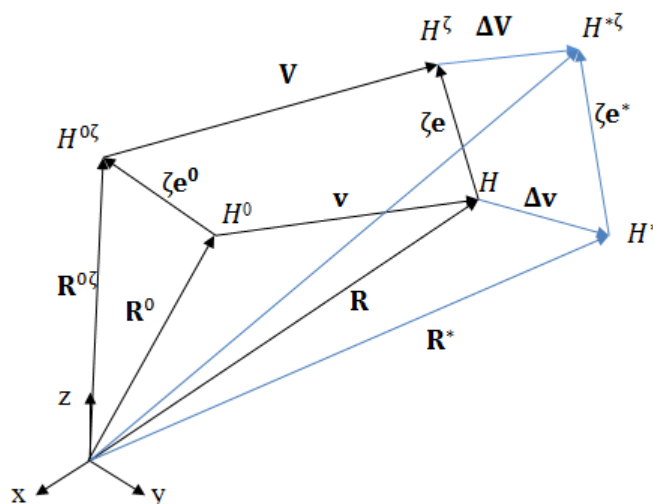


Рис. 1. Положение рассматриваемых точек при деформировании оболочки

Fig. 1. The position of the points under consideration when the shell is being deformed



Векторы перемещения \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$, входящие в (6), можно определить выражениями

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1^0 + v\mathbf{e}^0, \quad \Delta\mathbf{v} = \Delta v^1\mathbf{e}_1^0 + \Delta v\mathbf{e}^0. \quad (7)$$

Для определения базисных векторов в точках $H^{0\zeta}$, H^ζ и $H^{*\zeta}$ выполняется дифференцирование (6) по глобальной криволинейной координате s :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{0\zeta} &= \mathbf{R}_{,s}^{0\zeta}, & \mathbf{e}_1^\zeta &= \mathbf{R}_{,s}^\zeta = \mathbf{e}_1^{0\zeta} + \mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{e}_{,s} - \mathbf{e}_{,s}^0), \\ \mathbf{e}_1^{*\zeta} &= \mathbf{R}_{,s}^{*\zeta} = \mathbf{e}_1^\zeta + \Delta\mathbf{v}_{,s} + \zeta(\mathbf{e}_{,s}^* - \mathbf{e}_{,s}). \end{aligned} \quad (8)$$

Входящие в (8) производные векторов перемещений \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$ определяются с учетом (5) соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,s} &= p_1^1\mathbf{e}_1^0 + p_1\mathbf{e}^0, & \mathbf{v}_{,ss} &= p_{11}^1\mathbf{e}_1^0 + p_{11}\mathbf{e}^0, \\ \Delta\mathbf{v}_{,s} &= l_1^1\mathbf{e}_1^0 + l_1\mathbf{e}^0, & \Delta\mathbf{v}_{,ss} &= l_{11}^1\mathbf{e}_1^0 + l_{11}\mathbf{e}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины $p_1^1 \dots l_{11}$ в соотношениях (9) являются функциями компонент векторов перемещений \mathbf{v} и $\Delta\mathbf{v}$, а также их производных.

Орты нормалей к срединной поверхности оболочки в точках H и H^* определяются векторными произведениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{j} = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,s} \times \mathbf{j} = (\mathbf{e}_1^0 + v_{,s}) \times \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}^* &= \mathbf{e}_1^* \times \mathbf{j} = (\mathbf{R} + \Delta\mathbf{v})_{,s} \times \mathbf{j} = (\mathbf{e}_1 + \Delta\mathbf{v}_{,s}) \times \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения деформаций и их приращений в отстоящем на расстоянии ζ от срединной линии слое оболочки вращения при осесимметричном деформировании используются соотношения механики сплошной среды [14]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= \frac{(e_{11}^\zeta - e_{11}^{0\zeta})}{2}, & \Delta\varepsilon_{11}^\zeta &= \frac{(e_{11}^{*\zeta} - e_{11}^\zeta)}{2}, \\ \varepsilon_{22}^\zeta &= \frac{\mathbf{R}^\zeta\mathbf{k} - \mathbf{R}^{0\zeta}\mathbf{k}}{\mathbf{R}^{0\zeta}\mathbf{k}}, & \Delta\varepsilon_{22}^\zeta &= \frac{\mathbf{R}^{*\zeta}\mathbf{k} - \mathbf{R}^\zeta\mathbf{k}}{\mathbf{R}^\zeta\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ковариантные компоненты метрических тензоров для исходного и деформированного состояний определяются произведениями соответствующих базисных векторов

$$e_{11}^\zeta = \mathbf{e}_1^\zeta \cdot \mathbf{e}_1^\zeta, \quad e_{11}^{0\zeta} = \mathbf{e}_1^{0\zeta} \cdot \mathbf{e}_1^{0\zeta}, \quad e_{11}^{*\zeta} = \mathbf{e}_1^{*\zeta} \cdot \mathbf{e}_1^{*\zeta}. \quad (12)$$

Выражения (11) с учетом (8)–(10) и (12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= v_{,s}^1 - kv + \zeta(-kv_{,s}^1 - k_{,s}v^1 - v_{,ss}), & \varepsilon_{22}^\zeta &= vk_2 + k_1v^1 + \zeta(-k_1v_{,s} - kk_1v^1), \\ \Delta\varepsilon_{11}^\zeta &= \Delta v_{,s}^1 - k\Delta v + \zeta(-k\Delta v_{,s}^1 - k_{,s}\Delta v^1 - \Delta v_{,ss}), & & \\ \Delta\varepsilon_{22}^\zeta &= \Delta vk_2 + k_1\Delta v^1 + \zeta(-k_1\Delta v_{,s} - kk_1\Delta v^1), & & \end{aligned} \quad (13)$$

где $k = r_{,xx}x_{,s}^3$, $k_1 = r_{,x}x_{,s}/r$, $k_2 = x_{,s}/r$.

Деформации (13) представляются в более компактной форме следующим образом:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon + \zeta\chi_{\alpha\beta}, \quad \Delta\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \Delta\varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta\Delta\chi_{\alpha\beta}, \quad (14)$$



где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\chi_{\alpha\beta}$ — деформации и искривления срединной поверхности в точке H , $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\Delta\chi_{\alpha\beta}$ — приращения деформаций и искривлений срединной поверхности в точке H^* .

Соотношения (14) можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ 2 \times 4 \end{Bmatrix} = [G][L] \begin{Bmatrix} v \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon \\ 2 \times 4 \end{Bmatrix} = [G][L] \begin{Bmatrix} \Delta v \\ 4 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\chi_{11}\chi_{22}\}$, $\{\Delta\varepsilon\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}\Delta\varepsilon_{22}\Delta\chi_{11}\Delta\chi_{22}\}$, $\{v\}^T = \{uw\}$, $\{\Delta v\}^T = \{\Delta u\Delta w\}$, $[L]$ — матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

1.2. Зависимости между приращениями деформаций и приращениями напряжений на шаге нагружения

В первом варианте соотношения между компонентами деформаций и напряжений на шаге нагружения устанавливались на основе положений деформационной теории пластичности [15]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta e} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta p}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta e}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta p}$ — упругие и пластические деформации соответственно.

Согласно [15] компоненты девиаторов упругих и пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{\zeta e} - \varepsilon_s^e = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^e}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\zeta p} - \varepsilon_s^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad \alpha = 1, 2, \quad (17)$$

где ε_s^e и ε_s^p — средняя упругая и пластическая деформации, ε_i^e и ε_i^p — интенсивности упругих и пластических деформаций соответственно, σ_s — среднее напряжение.

В соотношениях (17) полагается, что при пластическом деформировании изменения объема не происходит ($\varepsilon_s^p = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = 0$).

Таким образом, суммарные деформации на шаге нагружения можно представить соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta - \varepsilon_s = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_s), \quad (18)$$

где $\varepsilon_s = \varepsilon_s^e + \varepsilon_s^p = \varepsilon_s^e$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p$.

Связь между средней деформацией и средним напряжением, входящими в (18), такая же, как и в пределах упругости [15]:

$$\varepsilon_s = \left(\frac{1 - 2\nu}{E} \right) \sigma_s = K_1 \sigma_s, \quad (19)$$

где ν — коэффициент поперечной деформации, E — модуль упругости материала оболочки.

Приращения деформаций на шаге нагружения определялись дифференцированием (18) и представлялись в общем виде следующим образом:

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta}{\partial\sigma_{11}} \Delta\sigma_{11} + \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta}{\partial\sigma_{22}} \Delta\sigma_{22}. \quad (20)$$

На основе (20) формируется матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon^\zeta \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix} = [D_1] \begin{Bmatrix} \Delta\sigma \\ 2 \times 1 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$



где $\{\Delta\varepsilon^\zeta\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}^\zeta, \Delta\varepsilon_{22}^\zeta\}$, $\{\Delta\sigma\}^T = \{\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}\}$, $[D_1]$ — матрица упругопластического деформирования на шаге нагружения.

Во втором варианте определяющие уравнения записаны на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений:

$$\Delta e_{ij} = \varphi \Delta s_{ij}, \quad (22)$$

где $\Delta e_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_s$, $\Delta s_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta\sigma_s$; $\Delta\varepsilon_s$, $\Delta\sigma_s$ — первые инварианты тензоров приращений деформаций и приращений напряжений.

Для определения коэффициента φ , входящего в (22), используются соотношения [16]

$$\varepsilon_i^\Delta = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta e_{ij} \Delta e_{ij}}, \quad \sigma_i^\Delta = \sqrt{\frac{3}{2} \Delta s_{ij} \Delta s_{ij}}, \quad (23)$$

где ε_i^Δ — интенсивность приращений деформаций, σ_i^Δ — интенсивность приращений напряжений.

Подставляя (22) в (23), можно получить выражения коэффициента φ в виде

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon_i^\Delta}{2 \sigma_i^\Delta}. \quad (24)$$

На шаге нагружения принимается равенство

$$\frac{\varepsilon_i^\Delta}{\sigma_i^\Delta} = \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta\sigma_i}, \quad (25)$$

где $\Delta\varepsilon_i$ — приращение интенсивности деформации, $\Delta\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений.

Отношение приращений интенсивностей напряжений и деформаций обозначается хордовым модулем диаграммы деформирования (E_h), а так как на шаге нагружения он неизвестен, то хордовый модуль заменяется касательным модулем диаграммы деформирования (E_k).

При учете (24), (25) коэффициент φ определяется выражением

$$\varphi = \frac{3 \Delta\varepsilon_i}{2 \Delta\sigma_i} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_h} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_k}. \quad (26)$$

На основании эксперимента при растяжении стержня между средними значениями устанавливается зависимость

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \sigma_s \left(\frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \right) \frac{1}{E_s} = K_2 \sigma_s, \quad (27)$$

где E_s — секущий модуль диаграммы деформирования.

На основе (26) и (27) из (22) определяются соотношения между приращениями деформаций и приращениями напряжений. Для осесимметрично нагруженной оболочки они запишутся выражениями

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}^\zeta = \frac{3}{2E_k} \Delta\sigma_{\alpha\alpha} - \Delta\sigma_s \left(\frac{3}{2} \frac{1}{E_k} - K_2 \right),$$

или в матричном виде

$$\begin{matrix} \{\Delta\varepsilon^\zeta\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [D_2] \\ 2 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta\sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix}. \quad (28)$$



1.3. Конечный элемент и матрица жесткости на шаге нагружения

Для случая осесимметричного нагружения наиболее целесообразным является использование одномерного конечного элемента с узлами i и j [17].

Компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента в исходном и деформированном состояниях определяются через узловые неизвестные следующим образом:

$$\begin{matrix} \{v\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ 2 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \{\Delta v\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ 2 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \{U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [T] \\ 8 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad (29)$$

где матрица $[A]$ содержит полиномы Эрмита третьей степени, $\{U_y^l\}^T, \{U_y^g\}^T$ — строки узловых неизвестных конечного элемента в локальной и глобальной системах координат, $[T]$ — матрица преобразования узловых неизвестных из локальной системы координат в глобальную.

Матрица-столбец приращений деформаций на шаге нагружения при учете (15) и (29) может быть представлена в виде

$$\begin{matrix} \{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [G][L][A] \\ 2 \times 44 \times 22 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^l\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [G][B] \\ 2 \times 44 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\Delta U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}. \quad (30)$$

Для формирования матрицы жесткости конечного элемента используется функционал, определяющий равенство возможных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения:

$$\Phi = \int_V \begin{matrix} \{\Delta \varepsilon^{\zeta}\}^T \\ 2 \times 1 \end{matrix} \left(\begin{matrix} \{\sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \{\Delta \sigma\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right) dV - \int_F \begin{matrix} \{\Delta v\}^T \\ 2 \times 1 \end{matrix} \left(\begin{matrix} \{P\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} \{\Delta P\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} \right) dF, \quad (31)$$

где V — объем элемента, F — площадь приложения нагрузки, $\{P\}^T = \{P_{11} P_{22}\}$, $\{\Delta P\}^T = \{\Delta P_{11} \Delta P_{22}\}$ — внешние нагрузки после j шагов нагружения и ее приращение на $(j+1)$ -м шаге нагружения.

Подставляя в функционал (31) выражения (21), (28)–(30) и выполняя его минимизацию по глобальным узловым неизвестным [17], можно получить матрицу жесткости конечного элемента $[K]$ и вектор его узловых усилий $\{f\}$, связанных соотношением

$$\begin{matrix} [K] \\ 8 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{U_y^g\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{f\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} \{R\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \quad (32)$$

где

$$\begin{matrix} [K] \\ 8 \times 8 \end{matrix} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_V \begin{matrix} [B]^T [G]^T [D_n] [G] [B] dV [T], \\ 8 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 44 \times 8 \quad 8 \times 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \{f\} \\ 8 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_F \begin{matrix} [A]^T \{ \Delta P \} dF, \\ 8 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix}$$

$\{R\} = \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_F \begin{matrix} [A]^T \{P\} dF \\ 8 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} [T]^T \\ 8 \times 8 \end{matrix} \int_V \begin{matrix} [B]^T [G] \{ \Delta \sigma \} dV \\ 8 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 2 \times 1 \end{matrix}$ — невязка Ньютона – Рафсона на рассматриваемом шаге нагружения.

Интегралы, входящие в (32), определялись численно на основе формул Гаусса.

2. Результаты

В качестве примера была решена тестовая задача по определению напряженного состояния оболочки вращения в форме усеченного эллипсоида, изображенного на рис. 2.

Оболочка, нижний край которой жестко зашпемлен ($w = 0, w_s = 0$), загружена внутренним давлением интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные:

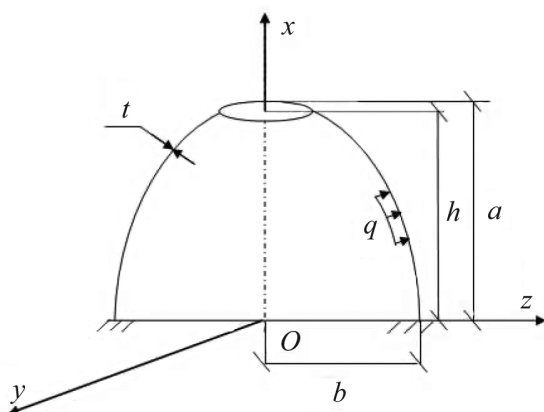


Рис. 2. Усеченная оболочка вращения
Fig. 2. Truncated shell of revolution

внутреннее давление $q = 5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$; модуль упругости $E = 7 \cdot 10^5$ МПа; толщина оболочки $t = 0.02$ м; параметры эллипса: $a = 1.3$ м, $b = 0.9$ м; высота усеченной оболочки $h = 1.2$ м; интенсивность напряжения, соответствующая пределу текучести, $\sigma_{iT} = 200$ МПа, интенсивность деформации, соответствующая пределу текучести, $\varepsilon_{iT} = 0.0023$. По условию сходимости вычислительного процесса на первом шаге нагружения при различных вариантах дискретизации оболочки было принято достаточным разбиение рассматриваемой конструкции на 32 элемента.

Было реализовано два варианта расчета. В первом варианте получены конечно-элементные решения на основании определяющих уравнений деформационной теории пластичности (21). Во втором варианте найдены конечно-элементные решения при использовании определяющих уравнений (28), полученных на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций и девиаторов приращений напряжений.

Для представления диаграммы деформирования на участке упрочнения использовалась параболическая функция вида

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^2 + B\varepsilon_i + C, \tag{33}$$

где $A = -23461.55$ МПа, $B = 181201.17$ МПа, $C = 1574.3$ МПа.

Результаты конечно-элементных решений в зависимости от числа шагов нагружения представлены в табл. 1, 2. В них приведены значения меридиональных напряже-

Таблица 1 / Table 1

Меридиональные напряжения при использовании предположения о неизменности объема в результате пластических деформаций
Meridional stresses using the assumption of volume invariance as a result of plastic deformations

Координаты Coordinates		Напряжение, МПа Stress, МПа		
$x, \text{ см / cm}$	$\zeta, \text{ см / cm}$	Число шагов нагружения, n Number of loading steps, n		
		30	50	70
0.0	-1.0	274.21	274.50	277.50
	-0.5	235.20	229.50	238.20
	0.0	119.00	121.40	119.50
	0.5	-28.30	-28.30	-29.10
	1.0	-177.50	-176.80	-178.30
120.0	-1.0	4.80	5.17	5.13
	-0.5	3.70	2.65	2.68
	0.0	0.15	0.19	0.17
	0.5	-2.40	-2.36	-2.30
	1.0	-4.80	-4.78	-4.79



Таблица 2 / Table 2

Меридиональные напряжения при использовании второго варианта определяющих уравнений
 Meridional stresses when using the second version of the constitutive equations

Координаты Coordinates		Напряжение, МПа Stress, MPa		
x , см / cm	ζ , см / cm	Число шагов нагружения, n Number of loading steps, n		
		30	50	70
0.0	-1.0	273.05	275.50	276.10
	-0.5	226.30	227.60	230.50
	0.0	119.60	120.40	122.60
	0.5	-25.20	-26.30	-29.50
	1.0	-176.60	-177.80	-178.40
120.0	-1.0	4.90	5.12	5.12
	-0.5	3.62	2.72	2.65
	0.0	0.15	0.17	0.18
	0.5	-2.30	-2.32	-2.30
	1.0	-4.74	-4.75	-4.89

ний в зависимости от координаты ζ в характерных точках конструкции: в опорном сечении и верхней границе.

Как видно из данных табл. 1, 2, картина напряженного состояния оболочки при нелинейном упрочнении диаграммы деформирования в обоих вариантах определяющих уравнений изменяется незначительно (отклонения в пределах 1%).

Для наглядности и удобства анализа полученных результатов при числе шагов $n = 70$ в опорном сечении оболочки были построены эпюры напряжений (рис. 3),

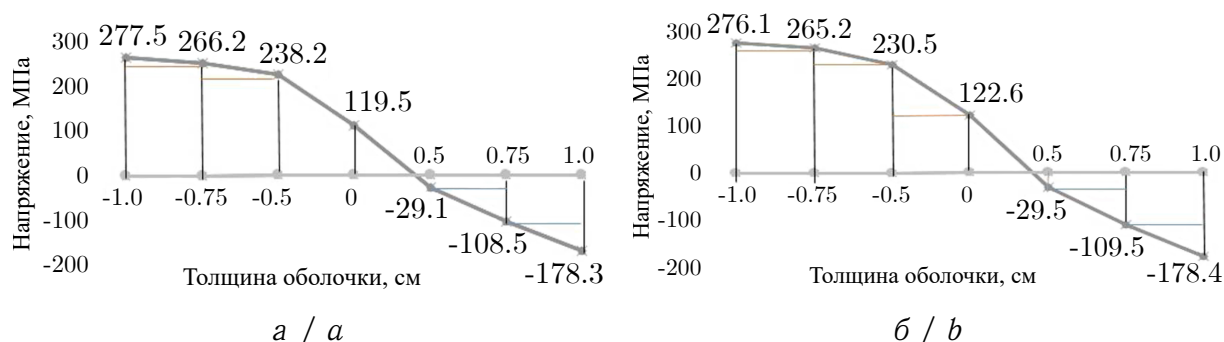


Рис. 3. Эпюры меридиональных напряжений в опорном сечении: а — классический вариант определяющих уравнений, б — предложенный вариант определяющих уравнений

Fig. 3. Diagrams of meridional stresses in the reference section: a — the classical version of constitutive equations, b — the proposed version of the constitutive equations



а также зависимости напряжений вдоль координаты s на внутренней стороне оболочки (рис. 4).

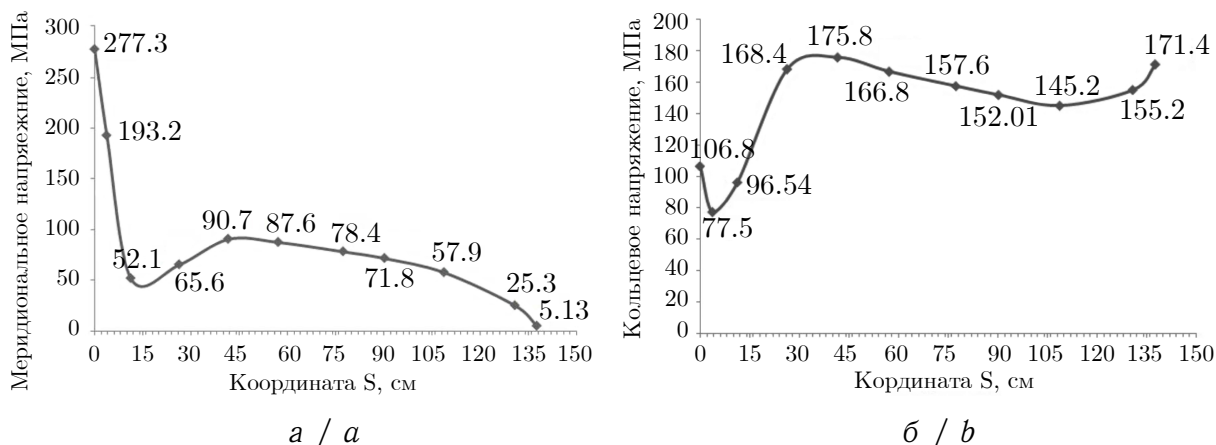


Рис. 4. Графики изменения меридиональных (а) и кольцевых (б) напряжений на внутренней стороне оболочки в зависимости от координаты s
 Fig. 4. Graphs of changes in the meridional (a) and hoop (b) stresses on the inner side of the shell depending on the coordinate s

3. Обсуждения

Для верификации полученных результатов производился анализ сходимости вычислительного процесса. При различных числах шагов нагружения сравнивались полученные значения конечно-элементных решений в рассматриваемых точках конструкции.

Как видно из данных табл. 1, 2, сходимость численных значений меридиональных напряжений в опорном сечении в зависимости от числа шагов нагружения выполняется. Значения контролируемых параметров напряженного состояния несущественно отличаются друг от друга (в пределах 1%).

Для рассматриваемой конструкции проверялось выполнение уравнения статики: сумма проекций всех сил на ось Ox равна нулю

$$P_z - P_v = 0, \tag{34}$$

где P_z — проекция равнодействующей всех заданных сил на ось Ox , P_v — проекция равнодействующей всех внутренних усилий на ось Ox .

Численное значение P_z определялось по формуле

$$P_z = q(\pi R_2^2 - \pi R_1^2) = 50(3.14(89)^2 - 3.14(33.61)^2) = 10667.13 \text{ кН}. \tag{35}$$

Чтобы определить внутреннее усилие в опорном сечении, необходимо разбить эпюру напряжений на элементарные геометрические фигуры и найти их площади, затем умножить полученные усилия на соответствующие данному слою длины окружностей. Суммированием полученных растягивающих и сжимающих усилий определяется значение силы в рассматриваемом сечении.



Суммарные внутренние усилия получились равными $P_v = 10843.9$ кН и $P_v = 10756.9$ кН соответственно при использовании определяющих соотношений, полученных на основании (21) и на основании (28). Погрешности вычислений составили $\delta = 1.64\%$ и $\delta = 0.84\%$ соответственно.

Третьим критерием верификации вычислительного процесса был контроль значения меридионального напряжения на срединной линии поперечного сечения в верхнем крае оболочечной конструкции. В соответствии с физическим смыслом задачи значение напряжения должно стремиться к нулю, так как данный край не загружен.

Анализируя результаты из табл. 1, 2, можно с уверенностью сказать, что данный критерий выполняется.

Заключение

Исходя из вышеизложенного материала, можно заключить, что алгоритм получения определяющих уравнений осесимметрично нагруженных оболочек вращения при учете физической нелинейности применяемого материала на основе предложенной гипотезы о пропорциональности компонент девиатора приращений деформаций и компонент девиатора приращений напряжений является корректным и позволяет получать конечно-элементные решения достаточной степени точности. Использование предположения о неизменности объема в результате пластических деформаций является, по мнению авторов, не совсем корректным. Как показал сравнительный анализ, выполненный для различных вариантов формирования матрицы пластичности на шаге нагружения, связь между средним линейным напряжением и средней линейной деформацией можно осуществлять в виде (27). Это, по мнению авторов, более соответствует физическому смыслу процесса деформирования и значительно упрощает процесс формирования матрицы пластичности на шаге нагружения.

Список литературы

1. Амосов А. А. Техническая теория тонких упругих оболочек. Москва : АСВ, 2011. 304 с.
2. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. Москва : Инфа-Инженерия, 2014. 480 с.
3. Cohen H., De Silva C. N. Nonlinear theory of elastic surfaces // Journal of Mathematical Physics. 1966. Vol. 7, iss. 2. P. 246–253. <https://doi.org/10.1063/1.1704926>
4. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading // Multiscale Solid Mechanics / ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev, L. A. Igumnov. Advanced Structured Materials. Vol. 141. Cham : Springer, 2021. P. 249–260. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_19
5. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петербургского университета, 2002. 388 с.
6. Kayumov R. A. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, iss. 5. P. 575–580. <https://doi.org/10.3103/S0025654417050120>
7. Badriev I. B., Paimushin V. N. Refined models of contact interaction of a thin plate with postioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Jurnal of Mathematics. 2017. Vol. 38, iss. 5. P. 779–793. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050055>
8. Beirao da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2015. Vol. 295. P. 327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>



9. Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P. Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture // *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2019. Vol. 17, iss. 2. P. 181–200. <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2018026804>
10. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // *Composite Structures*. 2016. Vol. 154. P. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
11. Ломакин Е. В., Минаев Н. Г. Осесимметричное поле напряжений вблизи кругового выреза в теле с зависящими от вида напряженного состояния пластическими свойствами // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 317–325. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>
12. Karpov V. V., Ignatev O. V., Semenov A. A. The stress-strain state of ribbed shell structures // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. Iss. 6 (74). P. 147–160. <https://doi.org/10.18720/MCE.74.12>
13. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Marchenko S. S., Nikolaev A. P. The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates // *Russian Aeronautics*. 2007. Vol. 50, № 2. P. 115–120. <https://doi.org/10.3103/S1068799807020018>
14. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 492 с.
15. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 400 с.
16. Ильюшин А. А. Пластичность. Упруго-пластические деформации. Санкт-Петербург : Ленанд, 2018. 352 с.
17. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Джабраилов А. Ш. Конечно-элементный анализ осесимметрично нагруженных оболочек вращения с ветвящимся меридианом при упруго-пластическом деформировании // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2013. № 3. С. 50–56.

References

1. Amosov A. A. *Tekhnicheskaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Technical Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow, ASV, 2011. 304 p. (in Russian).
2. Petrov V. V. *Nelineinaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear Incremental Building Mechanics]. Moscow, Infa-Inzheneriya, 2014. 480 p. (in Russian).
3. Cohen H., De Silva C. N. Nonlinear theory of elastic surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 1966, vol. 7, iss. 2, pp. 246–253. <https://doi.org/10.1063/1.1704926>
4. Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Elliptic boundary layer in shells of revolution under normal edge shock loading. In: H. Altenbach, V. A. Eremeyev, L. A. Igumnov, eds. *Multiscale Solid Mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 141. Springer, Cham, 2021, pp. 249–260. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_19
5. Kabrits S. A., Mikhailovsky E. I., Tovstik P. E., Chernykh K. F., Shamina V. A. *Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [General Nonlinear Theory of Elastic Shells]. St. Petersburg, Izd-vo S.-Peterburgskogo universiteta, 2002. 388 p.
6. Kayumov R. A. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium. *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, iss. 5, pp. 575–580. <https://doi.org/10.3103/S0025654417050120>
7. Badriev I. B., Paimushin V. N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii Jurnal of Mathematics*, 2017, vol. 38, iss. 5, pp. 779–793. <https://doi.org/10.1134/S1995080217050055>
8. Beirao da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, vol. 295, pp. 327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>



9. Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P. Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2019, vol. 17, iss. 2, pp. 181–200. <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2018026804>
10. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements. *Composite Structures*, 2016, vol. 154, pp. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
11. Lomakin E. V., Minaev N. G. Axisymmetric stress field near a circular cut in a solid with stress state dependent plastic properties. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 317–325 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-317-325>
12. Karpov V. V., Ignatev O. V., Semenov A. A. The stress-strain state of ribbed shell structures. *Magazine of Civil Engineering*, 2017, iss. 6 (74), pp. 147–160. <https://doi.org/10.18720/MCE.74.12>
13. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Marchenko S. S., Nikolaev A. P. The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates. *Russian Aeronautics*, 2007, vol. 50, no. 2, pp. 115–120. <https://doi.org/10.3103/S1068799807020018>
14. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics: in 2 vols.]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1976. 492 p. (in Russian).
15. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 400 p. (in Russian).
16. Plyushin A. A. *Plastichnost'. Uprugo-plasticheskie deformatsii* [Plastic. Elastic-plastic Deformation]. St. Petersburg, Lenand, 2018. 352 p. (in Russian).
17. Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Dzhabrailov A. Sh. A finite element analysis of axisymmetric loaded shells of revolution with a branching meridian under elastic-plastic deforming. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, no. 3, pp. 50–56 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.02.2021

Принята к публикации / Accepted 19.07.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 62–89

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 62–89

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>

Научная статья

УДК 539.3/617.547

Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности

Д. В. Иванов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Иванов Дмитрий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, начальник отдела компьютерного моделирования в биомедицине и материаловедении Образовательно-научного института наноструктур и биосистем, ivanovdv.84@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>

Аннотация. Предоперационное планирование лечения последствий заболеваний и повреждений позвоночно-тазового комплекса является обязательной процедурой и должно обеспечивать подбор имплантатов, режимов и техники их установки, а также воссоздание оптимальной биомеханики оперируемого сегмента. Для каждого конкретного случая хирург выбирает вариант лечения на основе качественных и количественных индивидуальных параметров пациента. Поэтому актуальной видится задача разработки некоторых измеримых характеристик (критериев), при помощи которых можно было бы выбирать успешный вариант для каждого конкретного пациента. В хирургии патологий позвоночно-тазового комплекса принято применять опросники качества жизни пациента для оценки отдаленных результатов лечения. При планировании лечения хирурги также рассчитывают геометрические параметры, позволяющие оценить степень деформации и подобрать необходимую коррекцию. В то же время геометрически и анатомически правильно спланированная операция может не быть успешной с точки зрения оценки прочности имплантируемых конструкций и системы «кость-имплантат» в целом. В данной работе представлены результаты разработки и апробации критериев оценки успешности хирургического реконструктивного лечения последствий заболеваний и повреждений позвоночно-тазового комплекса. Выделено три группы критериев: геометрические, биомеханические и клинические. Геометрические и биомеханические критерии позволяют сделать послеоперационный прогноз в ближайшей перспективе. Применение клинических критериев успешности позволяет сформулировать послеоперационный прогноз в отдаленном периоде после лечения. Критерии оценки успешности не предлагают хирургу какой-то новый вариант лечения, а только дают инструмент количественного сравнения рассматриваемых им вариантов лечения и выбора среди них успешного. Критерии оценки успешности лечения внедрены в разработанную в Саратовском университете систему предоперационного планирования Smart Plan Ortho, которая обеспечивает полный цикл предоперационного планирования в соответствии с методологией «планирование – моделирование – прогноз».

Ключевые слова: критерии оценки успешности, позвоночно-тазовый комплекс, ортопедия, напряженно-деформированное состояние, биомеханика, предоперационное планирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда перспективных исследований.



Для цитирования: Иванов Д. В. Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 62–89. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria

D. V. Ivanov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Dmitry V. Ivanov, ivanovdv.84@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>

Abstract. Preoperative planning for the treatment of the consequences of diseases and injuries of the spino-pelvic complex surgical treatment is a mandatory procedure and should ensure the selection of implants, modes and techniques for their installation, as well as the reconstruction of the optimal biomechanics of the operated segment. For each individual patient, the surgeon chooses a treatment variant based on his qualitative and quantitative individual parameters. Therefore, the task of developing some measurable characteristics (criteria) seems to be urgent, with the help of which it would be possible to choose a successful variant for each specific patient. In surgery of the spino-pelvic complex pathologies, it is customary to use questionnaires of the patient's quality of life to assess the long-term treatment results. During preoperative planning, surgeons also calculate geometric parameters to assess the degree of deformity and select the necessary correction. At the same time, a geometrically and anatomically correctly planned operation may not be successful in terms of assessing the strength of implanted structures and the "bone-implant" system as a whole. This paper presents the results of the development and testing of criteria for assessing the success of surgical reconstructive treatment of the consequences of the spino-pelvic complex diseases and injuries. Three groups of criteria have been identified: geometric, biomechanical, and clinical. Geometric and biomechanical criteria make it possible to obtain short-term postoperative prognosis. The use of clinical success criteria makes it possible to formulate long-term postoperative prognosis. The criteria for assessing success do not offer the surgeon any new treatment variant, but only provide a tool for quantitative comparison of the treatment variants that are considered by him and the choice of successful ones among them. The criteria for evaluating the success of treatment are implemented in the Smart Plan Ortho preoperative planning system developed at Saratov University, which provides a full cycle of preoperative planning in accordance with the planning–modeling–forecast methodology.

Keywords: success criteria, spino-pelvic complex, orthopedics, stress-strain state, biomechanics, preoperative planning

Acknowledgements: The work was supported by the Advanced Research Foundation.

For citation: Ivanov D. V. Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 62–89 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Позвоночно-тазовый комплекс (далее — ПТК) объединяет в себе тазобедренный сустав, таз и позвоночник. Предоперационное планирование является одним из основных условий для обеспечения качественных анатомо-функциональных результатов хирургического лечения заболеваний и повреждений ПТК [1, с. 7–24]. На этапе предоперационного планирования важно выбрать успешный вариант операции для каждого конкретного пациента. При этом выбор варианта должен осуществляться на основе качественной и количественной оценок параметров поврежденного участка ПТК, чтобы добиться удовлетворения так называемых критериев оценки успешности лечения.

По данным толкового словаря С. И. Ожегова [2], критерием называется мерило оценки или суждения. Разработкой критериев оценки успешности хирургического лечения патологий ПТК занимаются многие исследователи. Но большинство из них пытаются выделить количественные критерии [3–5] удовлетворенности пациента и его качества жизни после операции. В то же время применение этих критериев в предоперационном планировании может быть затруднено, так как они не дают ответы на вопросы о том, какую коррекцию нужно выполнить, какие имплантаты выбрать и как установить в том или ином случае.

Поэтому актуальной видится задача разработки критериев оценки успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК, позволяющих на этапе предоперационного планирования количественно обосновать применение варианта лечения или сравнить между собой различные варианты лечения и выбрать среди них успешный для конкретного пациента. В соответствии с клиническими рекомендациями при планировании хирургического лечения необходима не только высокоточная визуализация поврежденного участка ПТК, но и оценка его геометрических параметров для дальнейшего восстановления нормальной анатомии при его стабилизации и/или коррекции. С этой целью, в первую очередь, измеряют параметры сагиттального и фронтального балансов ПТК, а также рассчитывают их оптимальные значения. Процесс расчета геометрических параметров ПТК, позиционирования шаблонов имплантатов на рентгеновских снимках называют геометрическим планированием хирургического реконструктивного лечения.

Таким образом, нормальная анатомия сегмента ПТК может быть восстановлена различными способами, но не все из них могут обеспечить его оптимальную биомеханику с точки зрения оценки прочности устанавливаемых имплантатов и конструкции системы «кость-имплантат» в целом. Поэтому этап предоперационного геометрического планирования логично дополнить этапом биомеханического моделирования. Биомеханическое моделирование позволяет оценить стабильность фиксации, сроки службы имплантатов, а также риски повреждения костных и мягких тканей. Другими словами, этап биомеханического моделирования позволяет исследовать прочностные характеристики системы «кость-имплантат» и подобрать наиболее рациональный вариант фиксации.

Геометрическое планирование и биомеханическое моделирование как этапы предоперационного планирования обеспечивают позиционирование имплантатов, прогноз необходимой коррекции и фиксации, а также прогноз поведения системы «кость-имплантат» под действием внешних нагрузок, возникающих в процессе жизнедеятельности пациента сразу же после лечения. Однако дать оценку качества жизни пациента в отдаленном периоде эти этапы не могут. Этап прогнозирования, основанный на анализе накопленных знаний об аналогичных выполненных операциях



и реализованный в рамках предоперационного планирования, позволит сформулировать послеоперационный прогноз для конкретного пациента.

На каждом из трех описанных этапов предоперационного планирования должен производиться анализ числовых параметров, присущих конкретному пациенту, которые, в свою очередь, должны сравниваться с некоторыми пороговыми или критериальными значениями (интервалами значений). Эти значения или их интервалы будем называть критериями оценки успешности хирургического реконструктивного лечения (далее — критерии оценки успешности).

Данная работа посвящена разработке, категоризации и апробации критериев оценки успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК.

1. Геометрические критерии оценки успешности

В травматологической практике основная цель планирования — подбор имплантатов, режимов и техники их установки, обеспечивающих стабильность конструкции и репозицию костных отломков. В ортопедии предоперационное планирование должно обеспечивать подбор имплантатов для воссоздания оптимальной биомеханики оперируемого сегмента [1].

В этой связи на этапе планирования лечения необходимо не только качественно, но и количественно (с помощью измеряемых числовых параметров) описать оптимальную анатомию и биомеханику оперируемого сегмента. В частности, при планировании эндопротезирования тазобедренного сустава (ТБС) длина конечностей должна быть одинакова, центр ротации головки бедренного компонента имплантата должен соответствовать центру ротации здорового сустава и т. п. При планировании лечения повреждений позвоночника должен быть соблюден сагиттальный баланс (далее — СБ), или, другими словами, параметры СБ должны быть оптимальными. Поэтому необходима разработка совокупности числовых параметров, с помощью которых можно было бы отличить успешную с точки зрения анатомии (или геометрии) сегмента ПТК операцию от неуспешной и обеспечить адекватное геометрическое предоперационное планирование.

Геометрические критерии можно также называть рентгенологическими, так как их оценка может быть выполнена на основании измерений, сделанных по рентгеновским снимкам пациента. Рассмотрим критерии применительно к элементам ПТК и их патологиям.

Геометрические критерии оценки успешности операций на позвоночнике

Термин «позвоночно-тазовый баланс» впервые встречается в статье G. Duval-Beaupere [6]. В последние годы СБ ПТК изучают такие отечественные и иностранные исследователи, как J. C. Le Huec [7], F. Shwabb [8], А. В. Крутько [9], Р. М. Тихилов [10] и др.

Более того, соблюдение СБ или нейтрального вертикального выравнивания позвоночника в сагиттальной плоскости считается основной целью хирургических, эргономических и физиотерапевтических процедур [11]. Ранее была обоснована [12] необходимость коррекции сагиттального профиля пациента при выполнении операций на ПТК. Показано [13], что СБ играет определяющую роль в развитии дегенеративных изменений в смежных позвоночно-двигательных сегментах (ПДС) при протяженной фиксации. Параметры СБ используются [14, 15] для оценки послеоперационного периода и осложнений при лечении пациентов с дегенеративно-дистрофическими заболеваниями ПТК. Показано [16, 17], что сагиттальный профиль туловища строго

коррелирует с качеством жизни, а ПТК играет ключевую роль в компенсаторных механизмах дисбаланса туловища. Особенно важно, что в хирургической коррекции деформации воздействие на СБ и пояснично-тазовые параметры существенно улучшает качество жизни пациентов [17].

Для оценки параметров СБ современным клиницистам и исследователям доступны различные инструменты: системы PACS (системы передачи и архивации DICOM изображений, например, Radiant DICOM Viewer), системы предоперационного планирования (например, Surgimap) для настольных компьютеров, а также мобильные приложения для смартфонов [18].

СБ может быть описан с помощью угловых позвоночно-тазовых параметров: тазовый индекс (PI), поясничный лордоз (LL), наклон таза (PT) и наклон крестца (SS) (рис. 1).

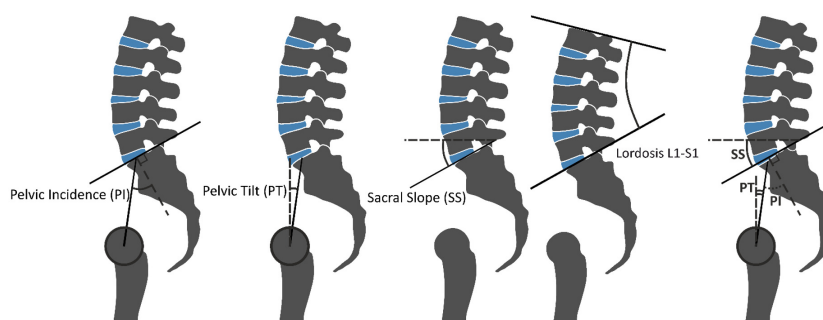


Рис. 1. Схематичное изображение измеряемых параметров СБ (слева направо): PI, PT, SS, лордоз L1-S1

Fig. 1. Schematic representation of the measured SB parameters (from left to right): PI, PT, SS, lordosis L1-S1

PI — угол между линией, перпендикулярной к середине замыкательной пластинки S1, и линией, соединяющей ту же точку с центром головки бедренной кости. PI — угол между линией, проведенной через центр головки бедренной кости и середину замыкательной пластинки S1, и линией, перпендикулярной этой пластинке. PT — угол между линией, проведенной через центр головки бедренной кости и середину замыкательной пластинки S1, и вертикальной линией. SS — угол между горизонтальной линией и линией, проведенной через замыкательную пластинку S1. LL (поясничный лордоз) — угол между линиями, проведенными через верхнюю замыкательную пластинку L1 и замыкательную пластинку S1.

Интервалы изменения основных параметров СБ изучены [7], а многие авторы пытаются разработать формулы для расчета оптимальных параметров баланса для конкретного пациента. Параметр PI является индивидуальным для каждого человека и остается неизменным в течение жизни. Показано [7, 19–23], что существует связь между PI и другими основными угловыми параметрами СБ, значения которых могут меняться при развитии дегенеративно-дистрофических заболеваний и травмах ПТК.

В связи с вышесказанным к геометрическим критериям оценки успешности следует отнести оптимальные параметры (интервалы параметров) СБ, которые можно рассчитать индивидуально по рентгенограмме, выполненной в положении стоя. Приведем формулы для расчета PT, SS, LL через PI, выведенные исследователями [8, 9, 14, 19, 21, 23] на основе показателей здоровых пациентов:

$$LL = 0.5 * PI + 28^\circ, \quad PT = 0.4 * PI - 11^\circ, \quad SS = PI - PT. \quad (1)$$



Приведенные формулы (1) позволяют рассчитать для конкретного пациента угловые параметры СБ через параметр PI, соответствующие его гармоничному профилю. Естественно, достичь точных значений того или иного параметра при операции крайне сложно, поэтому авторы дают диапазон изменения этих параметров. Например, Le Huek [7] предлагает для каждого из этих параметров учитывать диапазон $\pm 7^\circ$.

Алгоритм расчета угловых параметров СБ выглядит следующим образом. По рентгенограмме пациента, выполненной в положении стоя, осуществляется измерение параметров СБ. Затем для ряда из них по формулам (1) вычисляют их оптимальные значения, которых необходимо добиться при выполнении операции. Таким образом, при подготовке к операции хирург видит, какие параметры и на сколько требуется скорректировать [18]. Отметим, что именно поясничный лордоз (угол LL) может быть изменен хирургом во время операции в соответствии с его рассчитанным по формуле (1) значением [9]. А параметры SS и PT могут компенсироваться пациентом за счет постуральных изменений [9].

Параметр SVA (sagittal vertical alignment) измеряется как расстояние от отвеса, проходящего через центр седьмого шейного позвонка (C7PL), до заднего края поверхности верхней замыкательной пластинки крестца. Считается [24], что сбалансированный позвоночник имеет $SVA < 5$ см. Показано [25], что плохие функциональные результаты хирургического лечения дегенеративных повреждений грудопоясничного отдела позвоночника хорошо коррелируют с недостаточным сагиттальным выравниванием ($SVA > 5$ см). Оценка клинических и рентгенологических параметров, определяющих исходы минимально инвазивных операций по коррекции деформаций позвоночника, показала высокую корреляцию между улучшением качества жизни и сагиттальным выравниванием. Авторы [26] рекомендуют восстанавливать значение $SVA < 5$ см и добиваться оптимального лордоза (соотношения углов PI и LL) для достижения наилучших показателей ODI после лечения.

Клиницисты из Тайваня выявили [27], что пациенты с компрессионными переломами позвонков и сбалансированными позвоночно-тазовыми параметрами, а также сагиттальным выравниванием ($SVA < 5$ см) с большей вероятностью не потребуют хирургического вмешательства, чем пациенты с неоптимальными параметрами СБ. Это подтверждает тот факт, что при выполнении лечения и в случае деформаций, и в случае травмы позвоночника достижение оптимальных позвоночно-тазовых взаимоотношений обеспечит более качественные результаты и более высокое качество жизни пациентов.

Таким образом, значения SVA вместе с угловыми параметрами СБ, описанными выше, будем считать критериями оценки успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений позвоночника.

Геометрические критерии оценки успешности эндопротезирования тазобедренного сустава

Клиницисты утверждают, что помимо определения функциональных результатов при оценке исходов хирургического лечения дегенеративно-дистрофических заболеваний тазобедренного сустава необходимо использовать оценку рентгенологических изменений [28]. Другими словами, следует оценивать положение компонентов эндопротеза, а также геометрические характеристики оперированной конечности по результатам рентгенографического исследования. Исходя из анатомических соображений, к геометрическим критериям оценки успешности эндопротезирования тазобедренного сустава логично отнести значения параметров положения центра ротации вертлужного компонента, офсета (расстояние от центра ротации до оси ножки эндопротеза), а также длины прооперированной нижней конечности.



Исследования износа вкладыша вертлужного компонента позволяют сформулировать еще один критерий, заключающийся в том, что угол наклона вертлужного компонента во фронтальной плоскости должен составлять от 40 до 50 градусов [29].

Обоснования этих и других критериальных (пороговых) значений рентгенологических параметров для дооперационной оценки успешности эндопротезирования тазобедренного сустава также даны в литературе [1], а сами критерии сведены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Геометрические критерии оценки успешности эндопротезирования тазобедренного сустава
Geometric criteria for evaluating the success of hip arthroplasty

Описание критерия	Значение критерия	
	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
Вертикальный центр ротации вертлужного компонента	Соответствие здоровому тазобедренному суставу ¹ [1]	Несоответствие здоровому тазобедренному суставу
Горизонтальный центр ротации вертлужного компонента	Соответствие здоровому тазобедренному суставу ² [1]	Несоответствие здоровому тазобедренному суставу
Угол наклона (во фронтальной плоскости) вертлужного компонента	40–50° (нейтральное положение)	Менее 40° и более 50°
Угол антеверсии (наклон в сагиттальной плоскости) вертлужного компонента	10–15° ³	Менее 10° и более 15°
Недопокрытие вертлужного компонента	Не более 30%	Более 30%
Положение ножки в канале	Расположение ножки эндопротеза центральное (центральная ось ножки эндопротеза совпадает с центральной осью костно-мозгового канала)	Значительное вальгусное или варусное отклонение ножки от центральной оси бедренной кости — более 5°
Заполнение костно-мозгового канала	На рентгенограмме в прямой передне-задней проекции ножка эндопротеза заполняет канал на 80% и более, в боковой проекции — на 70% и более ⁴	На рентгенограмме в прямой передне-задней проекции ножка эндопротеза заполняет канал менее 80%, в боковой проекции — менее 70%. Размер конструкции недостаточно большой
Офсет	Равен офсету здорового тазобедренного сустава	Больше или меньше офсета здорового тазобедренного сустава
Длина нижней конечности	Длина нижних конечностей одинаковая	Длина нижних конечностей разная ⁵

Примечание. ^{1,2} — при эндопротезировании в сложных случаях допускается смещение центра ротации вверх до 2,5 см; ³ — при использовании заднего доступа угол антеверсии должен составлять 20–25°; ⁴ — имеет значение для бесцементных ножек; ⁵ — в случае ригидной компенсированной фронтальной деформации у лиц старческого возраста допускается незначительное (до 1 см) удлинение нижней конечности с целью сохранения привычных позвоночно-тазовых отношений.



2. Биомеханические критерии оценки успешности лечения

Биомеханические критерии оценки успешности лечения должны позволять оценить стабильность фиксации, прочность имплантируемых конструкций, риск повреждения кости и мягких тканей, а также прочность системы «кость-имплантат» в целом.

Стабильность фиксации в механике может быть оценена относительными перемещениями зафиксированных элементов ПТК. При оценке стабильности фиксации позвоночника применяют такой параметр, как значения амплитуды движения (range of motion, ROM) в позвоночно-двигательных сегментах (ПДС) [30–33].

При изгибающих нагрузках (наклоны туловища вперед и назад) параметр ROM вычисляется следующим образом. В сагиттальной плоскости в модели позвоночника до приложения нагрузки измеряется угол между верхними замыкательными пластинками соседних позвонков (рис. 2). После приложения нагрузки и изменения положения позвонков друг относительно друга снова производится измерение данного угла. ROM представляет собой разницу абсолютных значений двух измеренных углов (до и после деформации).

При нагрузках, соответствующих наклону туловища в сторону, ROM измеряется аналогично, но измерения проводятся во фронтальной плоскости [34]. При скручивающих нагрузках ROM вычисляется как угол, на который позвонки исследуемого ПДС повернулись друг относительно друга в процессе ротации в аксиальной плоскости [34].

По данным работы [35], при критических значениях ROM наступает повреждение межпозвонкового диска. При значениях ROM в $6\text{--}8^\circ$ в сагиттальной или фронтальной плоскостях повреждений диска не происходит. Критическим значением, по мнению авторов [35], для наклона вперед является $\text{ROM} = 15^\circ$.

В случае ротационной нагрузки на основе исследования ПДС со здоровыми дисками и ПДС с дисками, подверженными дегенеративным изменениям [36, 37], было показано, что ROM в 16° для здоровых и в 14.5° для больных дисков является критическим, приводящим к повреждению (указаны осредненные значения по выборке из эксперимента). Отмечается, что угол ротации в 20° в большинстве случаев приводит к разрушению диска вне зависимости от его состояния.

Таким образом, в качестве критерия оценки успешности хирургического лечения можно рассматривать параметр ROM, критические значения которого для разных типов нагрузок сведены в табл. 2.

Если говорить об относительных перемещениях зафиксированных элементов ПТК, то в этом случае во время операции хирург добивается наилучшей стабильности, т. е. минимальных относительных перемещений. В литературе встречаются данные о том,

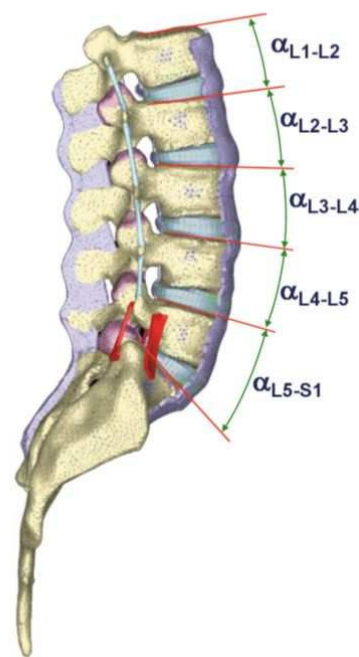


Рис. 2. Измерение амплитуды движения в сагиттальной плоскости [30] (цвет онлайн)

Fig. 2. Sagittal plane ROM measurement [30] (color online)



Таблица 2 / Table 2

Критериальные (пороговые) значения ROM, градусы
Criteria (threshold) ROM values, degrees

Элемент ПДС	Нагрузки		
	Наклоны вперед / назад	Наклоны в стороны	Повороты корпуса (скручивание)
Здоровый диск	15	15	16 (20)
Дегенеративный диск	15	15	14.5 (20)

что при движениях человека ПДС считается нестабильным, если относительные перемещения позвонков одного ПДС превышают 3 мм [38]. При рассмотрении нескольких вариантов хирургического лечения наиболее успешным считается тот, при котором смещения внутри сегмента минимальны по сравнению с другими вариантами [39–41].

Прочность системы «кость-имплантат» в целом и ее отдельных элементов определяется механическими напряжениями (например, эквивалентными напряжениями, интенсивностью напряжений), возникающими в ней при типовых (предельных) нагрузках, имитирующих состояние покоя и движения человека. Внутренние напряжения в имплантатах сравниваются с их прочностными характеристиками (характеристиками материала, из которых они изготовлены): пределом выносливости (при циклических нагрузках), пределами текучести и прочности [42–44] с некоторым коэффициентом запаса прочности. Другими словами, напряжения в имплантатах не должны превышать допускаемые напряжения (табл. 3). Допускаемые напряжения для металлов могут быть рассчитаны в соответствии с ГОСТ [45]. Как правило, для сталей в качестве допускаемого напряжения берется предел текучести с коэффициентом запаса, равным 1.5. Для титановых сплавов вместо предела текучести берут предел прочности с коэффициентом запаса 3.

Таким образом, с точки зрения прочности конструкции успешным будет считаться тот вариант операции, для которого выполняются условия прочности по допускаемым напряжениям. Если два и более варианта операции удовлетворяют условиям прочности по допускаемым напряжениям, то наиболее успешным среди них будет тот, для которого напряжения в имплантатах и костных тканях окажутся ниже, чем для других вариантов лечения.

Таблица 3 / Table 3

Прочностные характеристики костных тканей и имплантатов
Strength characteristics of bone tissues and implants

Материал	Предел прочности, МПа
Медицинская (хирургическая) нержавеющая сталь (316LS/316LVM) [46]	до 1241 (предел текучести до 945)
Титановый сплав Ti6Al4V ELI Titanium Alloy [47]	до 970 (предел текучести до 790)
Кортикальная костная ткань [48]	до 161
Губчатая костная ткань [49–51]	до 15



3. Клинические критерии оценки успешности лечения

Оценка успешности (или эффективности) хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК в долгосрочном периоде (более 12 месяцев после операции) большинством исследователей осуществляется при помощи различных опросников качества жизни пациентов [52]. В соответствии с рекомендациями Всемирной организации здравоохранения, опросник качества жизни должен отвечать ряду требований [53]:

- тест должен иметь разделы по оценке пяти основных сфер (физическое здоровье, психическое здоровье, уровень независимости в повседневной жизнедеятельности, социальные отношения, обеспечение);
- акцент должен быть сделан на субъективном восприятии пациентом своего здоровья;
- не включаются результаты объективных исследований; заполняется пациентом самостоятельно.

Опросники предназначены для измерения субъективных данных пациентов для получения на их основе объективных данных.

Анализ литературы также позволил выявить наиболее часто применяемые шкалы оценки качества жизни пациента [54–65]:

- для хирургии позвоночника:
 - визуальные аналоговые шкалы боли (ВАШ);
 - анкета оценки качества жизни Освестри (ODI);
 - опросник качества жизни SF-36;
 - субъективная оценочная шкала Макнаб (MacNab);
- для хирургии тазобедренного сустава:
 - визуальные аналоговые шкалы боли;
 - международная система оценки функционального состояния тазобедренного сустава W. H. Harris;
 - специфический индекс пациента;
 - опросник качества жизни SF-36;
 - шкала S. A. Majeed;
 - шкала WOMAC.

Среди них опросник Освестри (Oswestry Disability Index, ODI) считается сегодня «золотым стандартом» [66] оценки функциональных результатов операций на нижней части спины («low back pain»). Но говорить о том, что один опросник лучше другого, не приходится, можно лишь констатировать, что одни шкалы и опросники используются чаще других.

В медицинской литературе по сей день идут дебаты о том, как качественно охарактеризовать успешный или неуспешный исход лечения. В [67] успешным исходом, со слов пациентов, авторы считают такие понятия, как «полностью выздоровел» или «чувствую себя значительно лучше». В то же время существует понятие «минимальная клинически значимая разница», введенная в 1989 г. [68] и используемая в оценке результатов хирургического лечения заболеваний позвоночника и в 2000-х гг. [69]. Для обеспечения прогнозирования и/или оценки качества лечения в долгосрочном периоде необходимо качественные оценки исходов лечения сопоставить с их количественными интерпретациями.

Современные авторы утверждают, что именно успешность операций на позвоночнике может быть проведена на основе до- и послеоперационной оценки индекса ODI.



Выявлено критическое (пороговое) изменение индекса ODI — 20 баллов, которое можно считать показателем существенного улучшения качества жизни [67], но по другим данным [3], эта величина составляет от 13 до 28 баллов.

Таким образом, собирая данные опросников до и после операций, можно обеспечить прогнозирование отдаленных результатов лечения заболеваний и повреждений ПТК для конкретного пациента. Для проведения прогнозирования необходимо иметь достаточное количество репрезентативных данных:

- о случаях хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК, включая описание симптомов, геометрических параметров и антропометрических характеристик пациента;
- о типе проведенных операций;
- результаты опросов о качестве жизни пациентов до и после операции.

Статистический анализ накопленных данных позволит выявить факторы, которые определяют исходы хирургического лечения заболеваний и повреждений ПТК. На основе статистических данных опросов о качестве жизни пациентов до и после лечения можно сформулировать прогноз послеоперационного периода, который наряду с геометрическим планированием и биомеханическим моделированием ляжет в основу предоперационного планирования и обеспечит качественное и эффективное лечение.

4. Апробация критериев оценки успешности хирургического лечения на примере выбора варианта лечения повреждения ПТК конкретного пациента

В данном разделе будет показано применение геометрических и биомеханических критериев оценки успешности лечения при выборе (предоперационном планировании) успешного варианта хирургического реконструктивного лечения пациента с дегенеративно-дистрофическим заболеванием позвоночника. Следует отметить, что применение клинических критериев в данном примере продемонстрировано не будет, так как на данный момент не накоплена информация об аналогичных случаях, вариантах лечения и до- и послеоперационных опросах прооперированных пациентов.

Далее приведем результаты предоперационного планирования, выполненного для пациента А., 1950 года рождения, мужского пола, с диагнозом спондилолистез L4 позвонка.

Лечащим врачом запланированы следующие варианты хирургического лечения:

- а) транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков без коррективы лордоза;
- б) транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков с коррективкой лордоза.

На основе данных компьютерной томографии и функциональной рентгенограммы построены 3D модели [70] исследуемого сегмента позвоночника — L1–Sacrum. Для данной модели определены основные параметры СБ (табл. 4). Далее проведена процедура геометрического планирования хирургического лечения в соответствии с рекомендованными лечащим врачом вариантами хирургического лечения [71]. В результате получены модели:

- сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка без коррективы лордоза с транспедикулярной фиксацией на уровне L4–L5 позвонков (рис. 3, а);
- сегмента позвоночника L1–Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка с коррективкой лордоза с транспедикулярной фиксацией на уровне L4–L5 позвонков (рис. 3, б).



Таблица 4 / Table 4

Значения геометрических параметров, градусы
Values of geometric parameters, degrees

Параметры	3D модель сегмента позвоночника L1 – Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка до геометрического планирования хирургического лечения	3D модель сегмента позвоночника L1 – Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка после геометрического планирования хирургического лечения без корректировки лордоза	3D модель сегмента позвоночника L1 – Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка после геометрического планирования хирургического лечения с корректировкой лордоза
PI	67	67	56
PT	8	8	11
SS	59	59	45
GLL	71	71	52
Lordosis L4–S1	22	22	25

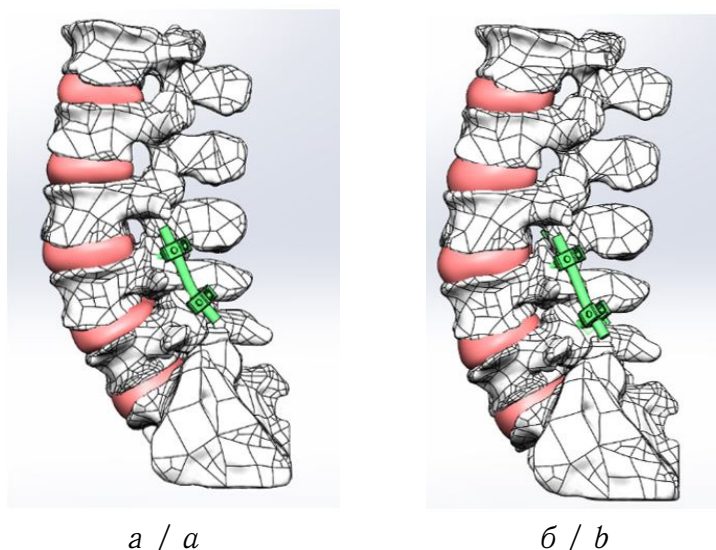


Рис. 3. 3D модели сегмента позвоночника L1 – Sacrum со спондилолистезом L4 позвонка: *а* — без корректировки лордоза с транспедикулярной фиксацией позвоночника на уровне L4–L5 позвонков; *б* — с корректировкой лордоза с транспедикулярной фиксацией позвоночника на уровне L4–L5 позвонков сегмента позвоночника с установленными имплантатами (цвет онлайн)

Fig. 3. 3D models of the L1 – Sacrum spine segment with spondylolisthesis of the L4 vertebra: *a* — without lordosis correction with transpedicular fixation of the spine at L4–L5 vertebrae level; *b* — with correction of lordosis with transpedicular fixation of the spine at L4–L5 vertebrae level of the spinal segment with installed implants (color online)

Корректировка лордоза, которую можно наблюдать на рисунке 3, б в сравнении с рисунком 3, а, позволила добиться оптимальных параметров СБ, что отражено в табл. 4.



На основе результатов выполненного геометрического планирования осуществлено биомеханическое моделирование каждого из запланированных вариантов лечения.

Моделировались различные виды физиологических (стационарных) нагрузок на исследуемый сегмент позвоночника: сгибание, разгибание, боковые наклоны вправо/влево, осевое вращение, статическая нагрузка (собственный вес пациента) [71]. Для этого исследуемый сегмент позвоночника нагружали следящей нагрузкой 600Н, изгибающими моментами 7.5 Н·м и крутящим моментом 7.5 Н·м. Следящая нагрузка моделировалась путем прикладывания вектора силы 100Н по нормали к верхней замыкательной пластине каждого здорового позвонка в каудальном направлении, т. е. в направлении нижней замыкательной пластины [42].

С точки зрения механики для каждой модели численно с помощью метода конечных элементов решалась статическая задача теории упругости, постановка которой подробно описана в работе [72]. Биомеханическое моделирование позволило оценить поля эквивалентных напряжений, а также ROM (рис. 4–6), максимальные значения которых для каждого запланированного варианта хирургического лечения представлены в табл. 5–6.

Рисунки 4 и 5 демонстрируют типичные поля эквивалентных напряжений в имплантатах и костных тканях позвонков. Следует отметить, что в модели без корректировки лордоза эквивалентные напряжения в имплантатах и позвонках всегда были выше аналогичных значений в модели с корректировкой лордоза.

Анализ эквивалентных напряжений в имплантатах проводится для определения их наибольших значений и сравнения с пределом прочности (с коэффициентом запаса прочности, равным 3) [45]. Металлофиксаторы изготовлены из титанового сплава, предел прочности которого составляет 970 МПа. Таким образом, допустимое напряжение составляет не более 323 МПа. Анализ значений эквивалентных напряжений из табл. 5 показывает, что модель без корректировки лордоза не удовлетворяет критерию прочности. В то же время модель с корректировкой лордоза этому критерию удовлетворяет при всех рассмотренных нагрузках.

Таблица 5 / Table 5

Максимальные эквивалентные напряжения в имплантатах, МПа
Maximum equivalent stresses in implants, MPa

Вариант лечения	Статическая нагрузка	Наклон вперед	Наклон назад	Наклон вправо	Наклон влево	Осевое вращение
Без корректировки лордоза	426	464	306	564	495	550
С корректировкой лордоза	298	270	119	315	288	319

Таблица 6 / Table 6

Максимальные эквивалентные напряжения в костных тканях, МПа
Maximum equivalent stresses in bone tissues, MPa

Вариант лечения	Статическая нагрузка	Наклон вперед	Наклон назад	Наклон вправо	Наклон влево	Осевое вращение
Без корректировки лордоза	66	98	35	77	68	81
С корректировкой лордоза	49	92	24	56	63	67

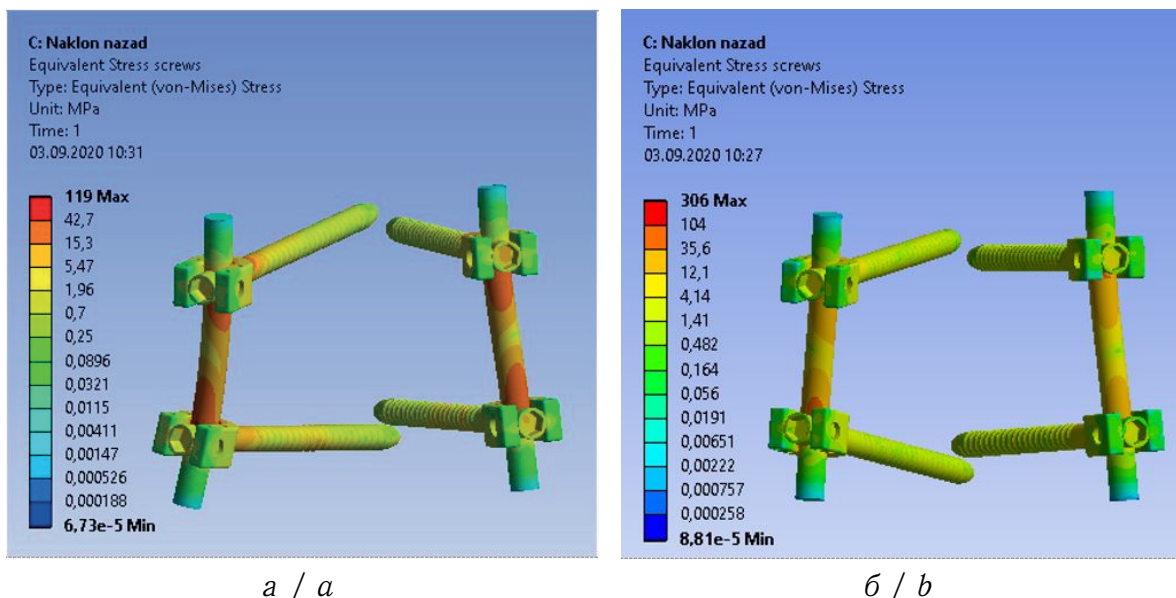


Рис. 4. Поля эквивалентных напряжений для транспедикулярной фиксации в случае наклона назад: *a* — с коррективкой лордоза, *б* — без коррективки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 4. Equivalent stresses in transpedicular fixation in the case of back bending: *a* — with lordosis correction, *b* — without lordosis correction (color online)

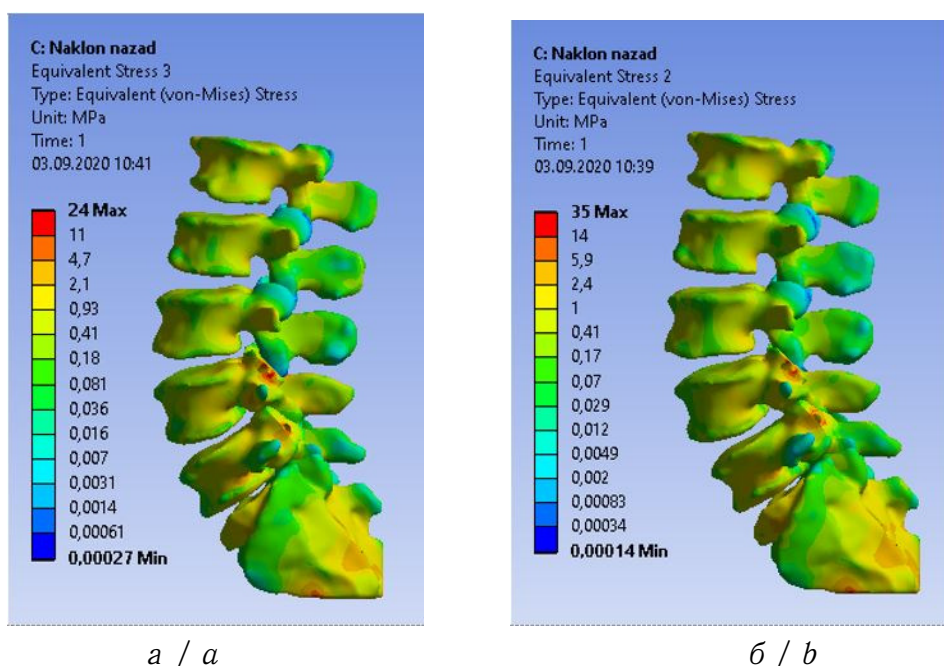
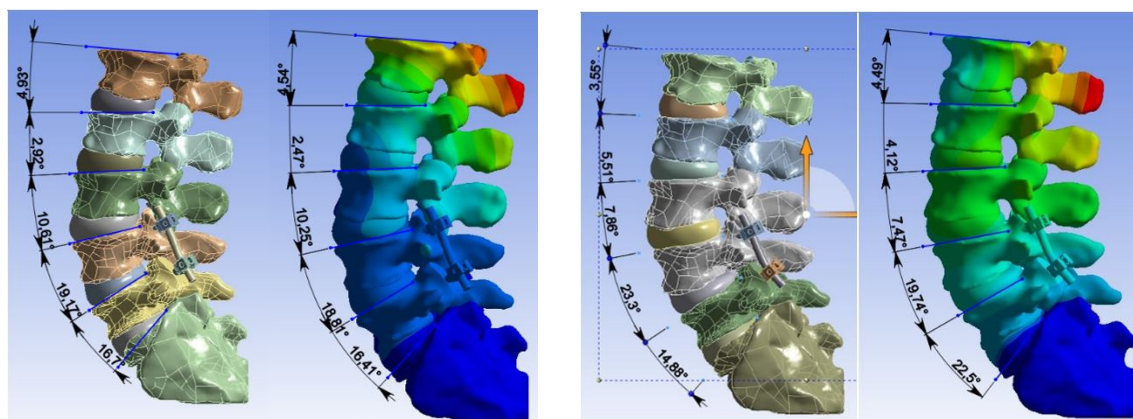


Рис. 5. Поля напряжений для костных тканей в случае наклона назад: *a* — с коррективкой лордоза, *б* — без коррективки лордоза (цвет онлайн)

Fig. 5. Equivalent stresses in bone tissue in the case of backward tilt: *a* — with lordosis correction, *b* — without lordosis correction (color online)



a / a

б / b

Рис. 6. Распределение значений амплитуды движения для двух моделей в случае статической нагрузки: *a* — с коррективкой лордоза, *б* — без коррективки лордоза (цвет онлайн)
 Fig. 6. ROM distribution for two models in the case of static loading: *a* — with lordosis correction, *b* — without lordosis correction (color online)

Максимальные значения эквивалентных напряжений в костных тканях позвонков для обоих вариантов лечения не превышают критические значения [48] (с коэффициентом запаса 1.5), которые могут привести к разрушению материала. Следует отметить, что коррективка лордоза и достижение оптимальных параметров баланса позволили добиться более низких эквивалентных напряжений в имплантатах и костных тканях при всех рассмотренных вариантах нагружения.

Анализ амплитуды движения (ROM) в сагиттальной плоскости для рассматриваемых вариантов лечения выявил следующее. Для модели сегмента позвоночника без коррективки лордоза разница значений ROM до и после приложения статической нагрузки оказалась существенной. Для модели сегмента позвоночника с коррективкой лордоза изменения ROM незначительны (рис. 6, 7). Данный вывод справедлив для всех рассмотренных в данной работе нагрузок. Таким образом, можно сделать вывод, что вариант лечения с транспедикулярной фиксацией позвоночника на уровне L4–L5 позвонков с коррективкой лордоза обеспечивает более высокую стабильность, особенно на участках L4–L5 и L5–Sacrum.

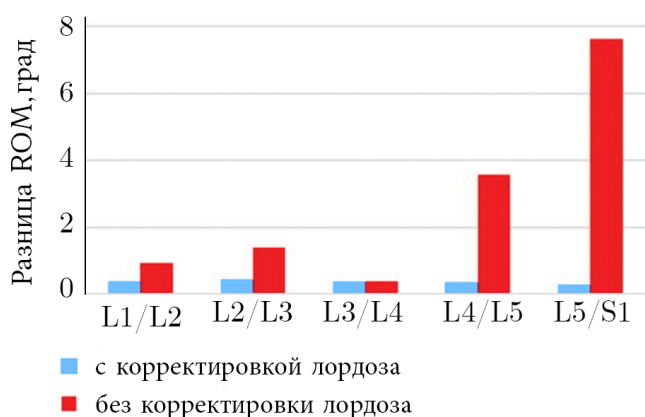


Рис. 7. Диаграмма разницы распределения значений амплитуды движения для двух моделей в случае статической нагрузки

Fig. 7. Diagram of the differences in ROM distribution for two models in the case of static loading

Выполненное геометрическое планирование и биомеханическое моделирование позволило определить, что успешный вариант лечения — транспедикулярная фиксация позвоночника на уровне L4–L5 позвонков с коррективкой лордоза. Данный вывод сформирован на основе применения геометрических и биомеханических критериев оценки успешности хирургического лечения.



5. Обсуждение и выводы

Разработаны и поделены на три группы критерии оценки успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК: геометрические, биомеханические и клинические (табл. 7).

Таблица 7 / Table 7

Критерии оценки успешности хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК
Criteria for assessing the success of surgical reconstructive treatment of diseases and injuries of the spino-pelvic complex

Геометрические	Биомеханические	Клинические
Значения основных параметров СБ удовлетворяют формулам (1) с допуском $\pm 7^\circ$ Параметр SVA < 5 см При эндопротезировании ТБС соблюдены критерии успешности из табл. 1	Относительные перемещения зафиксированных элементов ПТК: меньше — лучше (не более 3 мм внутри одного ПДС) Эквивалентные напряжения, интенсивность напряжения: меньше — лучше (не больше допустимых напряжений) Показатель ROM удовлетворяет критериям табл. 2	Разность до- и послеоперационных баллов по опросникам (ВАШ, ODI, SF-36, Macnab и др.) Например, до- и послеоперационных баллов ODI — не менее 20 баллов

Геометрические критерии позволяют на дооперационном этапе оценить степень деформации патологического сегмента ПТК, спрогнозировать уровень и степень необходимой хирургической коррекции. Биомеханические критерии способны оценить стабильность планируемых к установке имплантатов, прочностные характеристики системы «кость-имплантат в целом и ее компонентов. Иными словами, геометрические и биомеханические критерии позволяют сделать послеоперационный прогноз в ближайшей перспективе. Применение клинических критериев успешности направлено на обоснование или выбор успешного варианта лечения среди нескольких и на формулировку послеоперационного прогноза в отдаленном периоде после лечения.

Следует отметить, что критерии оценки успешности не предлагают хирургу какой-то новый вариант лечения, а только позволяют выполнить количественное сравнение рассматриваемых им вариантов (или же оценить один вариант) лечения и выбрать среди них успешный.

Критерии оценки успешности лечения внедрены в разработанную в Саратовском университете систему предоперационного планирования Smart Plan Ortho [73], которая обеспечивает полный цикл предоперационного планирования в соответствии с методологией «планирование – моделирование – прогноз». Геометрические критерии оценки успешности также использованы при разработке мобильного приложения «СпиноМетр» для измерения актуальных и расчета оптимальных значений параметров СБ ПТК. Апробация «СпиноМетра» [18] показала его межэкспертную надежность и высокую эффективность в сравнении с зарубежными аналогами. Апробация геометрических и биомеханических критериев оценки успешности неоднократно выполнялась при выборе и обосновании вариантов хирургического реконструктивного лечения заболеваний и повреждений ПТК [42, 72–74].

Отдельно стоит поднять вопрос о том, какие формулы следует использовать при расчете индивидуальных оптимальных параметров СБ. В данной работе приведены формулы (1), выбранные из литературных источников. В ряде источников [19–21, 23]



были найдены не только выведенные авторами формулы (регрессионные зависимости), но также и исходные данные, которые легли в разработку этих формул. Очевидно, что каждый исследователь получал эти зависимости на довольно ограниченных выборках, что может сужать область их применения. Поэтому запланировано исследование, направленное на обобщение приведенных в данной работе и других аналогичных зависимостей и вывод новых оригинальных формул, связывающих основные параметры СБ.

Система предоперационного планирования Smart Plan Ortho может быть использована в медицинских организациях совместно с центрами поддержки принятия врачебных решений. Для этого разработаны два режима использования Smart Plan Ortho медицинскими специалистами [73]: персональная виртуальная операционная (ПВО) и региональный центр (РЦ). В режиме ПВО врач самостоятельно планирует лечение «стандартных» клинических случаев и использует настольный компьютер в клинике, что позволяет решать задачу предоперационного планирования в упрощенной постановке. В режиме ПВО используется базовая версия программного обеспечения Smart Plan Ortho, в режиме РЦ — расширенная версия. РЦ подразумевает использование мощных вычислительных компьютеров и позволяет решать задачу биомеханики в наиболее полной постановке. В этой связи предполагается привлечение инженеров-биомехаников для выполнения предоперационного биомеханического моделирования в рамках режима РЦ. В то же время методика биомеханического моделирования является единой для обоих режимов работы Smart Plan Ortho.

Критерии оценки успешности лечения могут применяться специалистами разных областей с использованием системы Smart Plan Ortho: хирургами (травматологами и ортопедами) при предоперационном планировании в режиме ПВО, а также инженерами при обеспечении экспертной поддержки предоперационного планирования в режиме РЦ.

Следует отметить, что автор данной работы не претендует на разработку новых геометрических параметров ПТК и СБ, а также параметров до- и послеоперационной оценки качества жизни пациентов, применяемых клиницистами и исследователями для оценки успешности вариантов лечения. В работе проведена категоризация и апробация нескольких групп критериев оценки успешности в системе, что позволяет количественно оценивать варианты лечения и выбирать успешный для конкретного пациента. В то же время представленный набор биомеханических критериев оценки успешности приведен и апробирован впервые.

Совокупность разработанных критериев может быть дополнена другими количественными характеристиками. В данной статье предложен ограниченный список критериев, обоснованных в литературных источниках. Также показано их применение на конкретном примере при выборе варианта лечения пациента с дегенеративно-дистрофическим повреждением позвоночника.

В качестве ограничений применения геометрических критериев успешности нужно отметить следующее. Известно, что при сочетанной патологии, называемой коксо-вертебральным синдромом и выражающейся в дегенеративно-дистрофическом заболевании и ТБС, и пояснично-крестцового отдела позвоночника одновременно не всегда целесообразно достигать оптимальных анатомических параметров ТБС и/или позвоночника. Например, показано [75], что длительность, выраженность и характер тазовых нарушений определяют целесообразность коррекции техники операции эндопротезирования. В некоторых случаях может быть показано сохранение укорочения или удлинения нижней конечности, а также изменение офсета относительно его



значения у здоровой конечности. В таких случаях с точки зрения применения геометрических критериев успешности операция будет считаться неуспешной, но более правильной и выгодной для пациента.

Приведенные ограничения применения геометрических критериев успешности подтверждают, что для обеспечения качественного предоперационного планирования необходимо применение всех трех групп критериев оценки успешности лечения.

Список литературы

1. Руководство по хирургии тазобедренного сустава : в 2 т. / под ред. Р. М. Тихилова, И. И. Шубнякова. Санкт-Петербург : РНИИТО им. Р. Р. Вредена, 2015. Т. 2. 356 с.
2. Толковый словарь Ожегова онлайн. URL: <https://slovarozhegova.ru/> (дата обращения: 04.08.2021).
3. *Werner D. A. T., Grotle M., Gulati S., Austevoll I. M., Madsbu M. A., Lønne G., Solberg T. K.* Can a Successful Outcome After Surgery for Lumbar Disc Herniation Be Defined by the Oswestry Disability Index Raw Score? // *Global Spine Journal*. 2020. Vol. 10, iss 1. P. 47–54. <https://doi.org/10.1177/2192568219851480>
4. *Mjåset C., Zwart J. A., Goedmakers C. M. W., Smith T. R., Solberg T. K., Grotle M.* Criteria for success after surgery for cervical radiculopathy—estimates for a substantial amount of improvement in core outcome measures // *The Spine Journal*. 2020. Vol. 20, iss 9. P. 1413–1421. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2020.05.549>
5. *Alhaug O. K., Dolatowski F. C., Solberg T. K., Lønne G.* Criteria for failure and worsening after surgery for lumbar spinal stenosis: A prospective national spine registry observational study // *The Spine Journal*. 2021. Vol. 21, iss. 9. P. 1489–1496. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2021.04.008>
6. *Duval-Beaupère G., Schmidt C., Cosson P.* A barycentremetric study of the sagittal shape of spine and pelvis: The conditions required for an economic standing position // *Annals of Biomedical Engineering*. 1992. Vol. 20, iss. 4. P. 451–462. <https://doi.org/10.1007/BF02368136>
7. *Le Huec J. C., Hasegawa K.* Normative values for the spine shape parameters using 3D standing analysis from a database of 268 asymptomatic Caucasian and Japanese subjects // *European Spine Journal*. 2016. Vol. 25, iss. 11. P. 3630–3637. <https://doi.org/10.1007/s00586-016-4485-5>
8. *Schwab F., Lafage V., Patel A., Farcy J.-P.* Sagittal plane considerations and the pelvis in the adult patient // *Spine*. 2009. Vol. 34, iss. 17. P. 1828–1833. <https://doi.org/10.1097/brs.0b013e3181a13c08>
9. Крутько А. В. Сагиттальный баланс. Гармония в формулах. Справочная информация для практических расчетов. Новосибирск : АНО «Клиника НИИТО», 2016. 67 с.
10. Тихилов Р. М., Николаев Н. С., Шубняков И. И., Мясоедов А. А., Бояров А. А., Ефимов А. В., Сяндюков А. Р. Особенности эндопротезирования тазобедренного сустава у пациентов с ризомелической формой болезни Бехтерева (клиническое наблюдение) // *Травматология и ортопедия России*. 2016. Т. 22, № 2. С. 70–79. <https://doi.org/10.21823/2311-2905-2016-0-2-70-79>
11. Макиров С. К., Юз А. А., Джахаф М. Т. Методика оценки параметров сагиттального позвоночно-тазового баланса // *Хирургия позвоночника*. 2015. Т. 12, № 3. С. 55–63. <https://doi.org/10.14531/ss2015.3.55-63>
12. Кудяшев А. Л., Хоминец В. В., Теремшонок А. В., Коростелев К. Е., Нагорный Е. Б., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Биомеханические предпосылки формирования проксимального переходного кифоза после транспедикулярной фиксации поясничного отдела позвоночника // *Российский журнал биомеханики*. 2017. Т. 21, № 3. С. 313–323. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2017.3.07>



13. Kim Y. J., Lenke L. G., Bridwell K. H., Kim J., Cho S. K., Cheh G., Yoon J. Proximal junctional kyphosis in adolescent idiopathic scoliosis after 3 different types of posterior segmental spinal instrumentation and fusions: Incidence and risk factor analysis of 410 cases // *Spine*. 2007. Vol. 32, iss. 24. P. 2731–2738. <https://doi.org/10.1097/BRS.0b013e31815a7ead>
14. Le Huec J. C., Charosky S., Barrey C., Rigal J., Aunoble S. Sagittal imbalance cascade for simple degenerative spine and consequences: Algorithm of decision for appropriate treatment // *European Spine Journal*. 2011. Vol. 20, suppl. 5. P. 699–703. <https://doi.org/10.1007/s00586-011-1938-8>
15. Johnson R. D., Valore A., Villaminar A., Comisso M., Balsano M. Sagittal balance and pelvic parameters — a paradigm shift in spinal surgery // *Journal of Clinical Neuroscience*. 2013. Vol. 20, iss. 2. P. 191–196. <https://doi.org/10.1016/j.jocn.2012.05.023>
16. Котельников А. О., Рябых С. О., Бурцев А. В. “Hip-spine” синдром — взгляд на проблему с точки зрения биомеханики // *Гений ортопедии*. 2019. Т. 25, № 4. С. 541–549. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-4-541-549>
17. Бурцев А. В., Рябых С. О., Котельников А. О., Губин А. В. Клинические аспекты сагиттального баланса у взрослых // *Гений ортопедии*. 2017. Т. 23, № 2. С. 228–235. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2017-23-2-228-235>
18. Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Лихачев С. В., Полиенко А. В., Харламов А. В., Шульга А. Е. Сравнительный анализ мобильного приложения для измерения параметров сагиттального баланса «СпиноМетр» с системой Surgimar: апробация межэкспертной надежности // *Гений ортопедии*. 2021. Т. 27, № 1. С. 74–79. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2021-27-1-74-79>
19. Pan C., Wang G., Sun J. Correlation between the apex of lumbar lordosis and pelvic incidence in asymptomatic adult // *European Spine Journal*. 2020. Vol. 29, iss. 3. P. 420–427. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-06183-y>
20. Legaye J., Duval-Beaupère G. Sagittal plane alignment of the spine and gravity: A radiological and clinical evaluation // *Acta Orthopaedica Belgica*. 2005. Vol. 71, iss. 2. P. 213–220.
21. Vialle R., Levassor N., Rillardon L., Templier A., Skalli W., Guigui P. Radiographic analysis of the sagittal alignment and balance of the spine in asymptomatic subjects // *Journal of Bone & Joint Surgery*. 2005. Vol. 87, iss. 2. P. 260–267. <https://doi.org/10.2106/JBJS.D.02043>
22. Hyun S.-J., Han S., Kim Y. B., Kim Y. J., Kang G.-B., Cheong J.-Y. Predictive formula of ideal lumbar lordosis and lower lumbar lordosis determined by individual pelvic incidence in asymptomatic elderly population // *European Spine Journal*. 2019. Vol. 28, iss. 9. P. 1906–1913. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-05955-w>
23. Sullivan T. B., Marino N., Reighard F. G., Newton P. O. Relationship between lumbar lordosis and pelvic incidence in the adolescent patient: Normal cohort analysis and literature comparison // *Spine Deformity*. 2018. Vol. 6, iss. 5. P. 529–536. <https://doi.org/10.1016/j.jspd.2018.02.002>
24. Manoharan S. R., Joshi D., Owen M., Theiss S. M., Deinlein D. Relationship of Cervical Sagittal Vertical Alignment After Sagittal Balance Correction in Adult Spinal Deformity: A Retrospective Radiographic Study // *International Journal of Spine Surgery*. 2018. Vol. 12, № 2. P. 269–275. <https://doi.org/10.14444/5033>
25. Yeh K.-T., Lee R.-P., Chen I.-H., Yu T.-C., Liu K.-L., Peng C.-H., Wang J.-H., Wu W.-T. Correlation of Functional Outcomes and Sagittal Alignment After Long Instrumented Fusion for Degenerative Thoracolumbar Spinal Disease // *Spine*. 2018. Vol. 43, iss. 19. P. 1355–1362. <https://doi.org/10.1097/BRS.0000000000002471>
26. Than K. D., Park P., Fu K.-M., Nguyen S., Wang M. Y., Chou D., Nunley P. D., Anand N., Fessler R. G., Shaffrey C. I., Bess S., Akbarnia B. A., Deviren V., Uribe J. S., La Marca F., Kanter A. S., Okonkwo D. O., Mundis G. M., Mummaneni P. V. Clinical and radiographic parameters associated with best versus worst clinical outcomes in minimally



- invasive spinal deformity surgery // Journal of Neurosurgery. 2016. Vol. 25, iss. 1. P. 21–25. <https://doi.org/10.3171/2015.12.SPINE15999>
27. Kao F.-C., Huang Y.-J., Chiu P.-Y., Hsieh M.-K., Tsai T.-T. Factors Predicting the Surgical Risk of Osteoporotic Vertebral Compression Fractures // Journal of Clinical Medicine. 2019. Vol. 8, № 4. P. 501. <https://doi.org/10.3390/jcm8040501>
 28. Корнилов Н. В., Войтович А. В., Машков В. М., Эйштейн Г. Г. Хирургическое лечение дегенеративно-дистрофических поражений тазобедренного сустава. Санкт-Петербург : ЛИТО Синтез, 1997. 292 с.
 29. Tian J.-L., Sun L., Hu R. Y., Han W., Tian X.-B. Correlation of Cup Inclination Angle with Liner Wear for Metal-on-polyethylene in Hip Primary Arthroplasty // Orthopaedic Surgery. 2017. Vol. 9, iss. 2. P. 186–190. <https://doi.org/doi:10.1111/os.12337>
 30. Más Y., Gracia L., Ibarz E., Gabarre S., Peña D., Herrera A. Finite element simulation and clinical follow-up of lumbar spine biomechanics with dynamic fixations // PLoS ONE. 2017. Vol. 12, № 11. e0188328. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188328>
 31. Chun K., Yang I., Kim N., Cho D. Effect of Device Rigidity and Physiological Loading on Spinal Kinematics after Dynamic Stabilization: An In-Vitro Biomechanical Study // Journal of Korean Neurosurgical Society. 2015. Vol. 58, № 5. P. 412–418. <https://doi.org/10.3340/jkns.2015.58.5.412>
 32. Clair S. St., Tan J. S., Lieberman I. Oblique lumbar interbody fixation: A biomechanical study in human spines // Journal of Spinal Disorders and Techniques. 2012. Vol. 25, iss. 4. P. 183–189. <https://doi.org/10.1097/BSD.0b013e318211fc6b>
 33. Niosi C. A., Zhu Q. A., Wilson D. C., Keynan O., Wilson D. R., Oxland T. R. Biomechanical characterization of the three-dimensional kinematic behaviour of the Dynesys dynamic stabilization system: An in vitro study // European Spine Journal. 2006. Vol. 15, iss. 6. P. 913–922. <https://doi.org/10.1007/s00586-005-0948-9>
 34. White III A. A., Panjabi M. M. Clinical Biomechanics of the Spine : 2nd ed. New York : J. B. LIPPINCOTT Company, 1990. 722 p.
 35. Brown T., Hansen R. J., Yorra A. J. Some mechanical tests on the lumbosacral spine with particular reference to the intervertebral discs; A preliminary report // The Journal of Bone and Joint Surgery. American volume. 1957. Vol. 39-A, iss. 5. P. 1135–1164.
 36. Inoue N., Espinoza Orías A. A. Biomechanics of intervertebral disk degeneration // Orthopedic Clinics of North America. 2011. Vol. 42, iss. 4. P. 487–499. <https://doi.org/10.1016/j.ocl.2011.07.001>
 37. Hansson T. H., Keller T. S., Panjabi M. M. A study of the compressive properties of lumbar vertebral trabeculae: Effects of tissue characteristics // Spine. 1987. Vol. 12, iss. 1. P. 56–62. <https://doi.org/10.1097/00007632-198701000-00011>
 38. Байков Е. С., Байкалов А. А. Связь биомеханических и биохимических параметров позвоночно-двигательных сегментов с рецидивом грыж поясничных межпозвонковых дисков // Хирургия позвоночника. 2017. Т. 14, № 4. С. 61–68. <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.61-68>
 39. Natarajan R. N., Watanabe K., Hasegawa K. Biomechanical analysis of a long-segment fusion in a lumbar spine — a finite element model study // Journal of Biomechanical Engineering. 2018. Vol. 140, iss. 9. P. 1–7. <https://doi.org/10.1115/1.4039989>
 40. Shin J. K., Lim B. Y., Goh T. S., Son S. M., Kim H.-S., Lee J. S., Lee C.-S. Effect of the screw type (S2-alar-iliac and iliac), screw length, and screw head angle on the risk of screw and adjacent bone failures after a spinopelvic fixation technique: A finite element analysis // PLoS ONE. 2018. Vol. 13, № 8. P. 296–301. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201801>
 41. Duan Y., Wang H. H., Jin A. M., Zhang L., Min S. X., Liu C. L., Qiu S. J., Shu X. Q. Finite element analysis of posterior cervical fixation // Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research. 2015. Vol. 101, iss. 1. P. 23–29. <https://doi.org/10.1016/j.otsr.2014.11.007>



42. Кудяшев А. Л., Хоминец В. В., Терешонок А. В., Нагорный Е. Б., Стадниченко С. Ю., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Ковтун А. Л. Биомеханическое моделирование при хирургическом лечении пациента с истинным спондилолистезом поясничного позвонка // Хирургия позвоночника. 2018. Т. 15, № 4. С. 87–94. <https://doi.org/10.14531/2018.4.87-94>
43. La Barbera L., Galbusera F., Villa T., Costa F., Wilke H.-J. ASTM F1717 standard for the preclinical evaluation of posterior spinal fixators: Can we improve it? // Journal of Engineering in Medicine. 2014. Vol. 228, iss. 10. P. 1014–1026. <https://doi.org/10.1177/0954411914554244>
44. Su Y.-S., Ren D., Wang P.-C. Comparison of biomechanical properties of single- and two-segment fusion for denis type B spinal fractures // Orthopaedic Surgery. 2013. Vol. 5, iss. 4. P. 266–273. <https://doi.org/10.1111/os.12068>
45. ГОСТ Р 52857.1-2007 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования. Москва : Стандартинформ, 2008. 26 с.
46. 316LS/316LVM Surgical Stainless Steel Bar — ASTM F138. URL: <https://www.upmet.com/products/stainless-steel/316lslvm> (дата обращения: 17.08.2018).
47. Ti6Al4V ELI Titanium Alloy. URL: <https://www.arcam.com/wp-content/uploads/Arcam-Ti6Al4V-ELI-Titanium-Alloy.pdf> (дата обращения: 17.08.2018).
48. Havaladar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive loadings on human femur bone // Advanced Biomedical Research. 2014. Vol. 3. P. 101. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
49. Карлов А. В., Шахов В. П. Системы внешней фиксации и регуляторные механизмы оптимальной биомеханики. Томск : STT, 2001. 477 с.
50. Misch C. E., Qu Z., Bidez M. W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement // Journal of Oral and Maxillofacial Surgery. 1999. Vol. 57, iss. 6. P. 700–706. [https://doi.org/10.1016/s0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/s0278-2391(99)90437-8)
51. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function // Journal of Biomechanics. 1987. Vol. 20, iss. 11. P. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
52. Гуца А. О., Юсупова А. Р. Оценка исходов хирургического лечения дегенеративно-дистрофических заболеваний позвоночника // Хирургия позвоночника. 2017. Т. 14, № 4. С. 85–94. <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.85-94>
53. Бывальцев В. А., Белых Е. Г., Алексеева Н. В., Сороковиков В. А. Применение шкал и анкет в обследовании пациентов с дегенеративным поражением поясничного отдела позвоночника : методические рекомендации. Иркутск : ФГБУ «НЦРВХ» СО РАМН, 2013. 32 с.
54. Cao P., Hao W., Zhang L., Zhang Q., Liu X., Li M. Safety and Efficacy Studies of Vertebroplasty with Dual Injections for the Treatment of Osteoporotic Vertebral Compression Fractures: Preliminary Report // Academic Radiology. 2020. Vol. 27, iss. 8. P. e224–e231. <https://doi.org/10.1016/j.acra.2019.09.023>
55. Cook C. E., Learman K. E., O'Halloran B. J., Showalter C. R., Kabbaz V. J., Goode A. P., Wright A. A. Which Prognostic Factors for Low Back Pain Are Generic Predictors of Outcome Across a Range of Recovery Domains? // PTJ: Physical Therapy & Rehabilitation Journal. 2013. Vol. 93, iss. 1. P. 32–40. <https://doi.org/10.2522/ptj.20120216>
56. Cheng L., Cai H., Yu Y., Li W., Li Q., Liu Z. Modified Full-Endoscopic Interlaminar Discectomy via an Inferior Endplate Approach for Lumbar Disc Herniation: Retrospective 3-Year Results from 321 Patients // World Neurosurgery. 2020. Vol. 141. P. e537–e544. <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2020.05.234>
57. Marouby S., Coulomb R., Maury E., Assi C., Mares O., Kouyoumdjian P. Prospective Evaluation of Spino-Pelvic Parameters with Clinical Correlation in Patients Operated with



- an Anterior Lumbar Interbody Fusion // *Asian Spine Journal*. 2020. Vol. 14, № 1. P. 88–96. <https://doi.org/10.31616/asj.2019.0041>
58. *Staatjes V. E., Vergroesen P. A., Zeilstra D. J., Schröder M. L.* Identifying subsets of patients with single-level degenerative disc disease for lumbar fusion: The value of prognostic tests in surgical decision making // *The Spine Journal*. 2018. Vol. 18, iss. 4. P. 558–566. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2017.08.242>
 59. *Vieli M., Staatjes V. E., Eversdijk H. A. J., De Wispelaere M. P., Oosterhuis J. W. A., Schröder M. L.* Safety and Efficacy of Anterior Lumbar Interbody Fusion for Discogenic Chronic Low Back Pain in a Short-stay Setting: Data From a Prospective Registry // *Cureus*. 2019. Vol. 11, № 8. e5332. <https://doi.org/10.7759/cureus.5332>
 60. *Ertzgaard P., Nene A., Kiekens C., Burns A. S.* A review and evaluation of patient-reported outcome measures for spasticity in persons with spinal cord damage: Recommendations from the Ability Network — an international initiative // *The Journal of Spinal Cord Medicine*. 2020. Vol. 43, iss. 6. P. 813–823. <https://doi.org/10.1080/10790268.2019.1575533>
 61. *Амирджанова В. Н., Горячев Д. В., Коршунов Н. И., Ребров А. П., Сороцкая В. Н.* Популяционные показатели качества жизни по опроснику SF-36 (результаты многоцентрового исследования качества жизни «МИРАЖ») // *Научно-практическая ревматология*. 2008. Т. 46, № 1. С. 36–48.
 62. *Gary K. W., Cao Y., Burns S. P., McDonald S. D., Krause J. S.* Employment, health outcomes, and life satisfaction after spinal cord injury: Comparison of veterans and nonveterans // *Spinal Cord*. 2020. Vol. 58, № 1. P. 3–10. <https://doi.org/10.1038/s41393-019-0334-9>
 63. *Колесников С. В., Дьячкова Г. В., Камшилов Б. В., Колесникова Э. С.* Оценка клинико-функционального статуса больных с имплантатом тазобедренного сустава // *Гений ортопедии*. 2019. Т. 25, № 1. С. 32–37. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-1-32-37>
 64. *Wright J. G., Rudicel S., Feinstein A. R.* Ask patients what they want. Evaluation of individual complaints before total hip replacement // *The Journal of Bone and Joint Surgery*. 1994. Vol. 76, № 2. P. 229–234.
 65. *Дулаев А. К., Кажанов И. В., Преснов Р. А., Микитюк С. И.* Триангулярный остеосинтез переломов крестца при вертикально-нестабильных повреждениях таза // *Политравма*. 2018. № 2. С. 17–34.
 66. *Fairbank J. C., Pynsent P. B.* The Oswestry Disability Index // *Spine*. 2000. Vol. 25, iss. 22. P. 2940–2952. <https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017>
 67. *Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M.* Can we define success criteria for lumbar disc surgery? Estimates for a substantial amount of improvement in core outcome measures // *Acta Orthopaedica*. 2013. Vol. 84, iss. 2. P. 196–201. <https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634>
 68. *Jaeschke R., Singer J., Guyatt G. H.* Measurement of health status: Ascertaining the minimal clinically important difference // *Controlled Clinical Trials*. 1989. Vol. 10, iss. 4. P. 407–415. [https://doi.org/10.1016/0197-2456\(89\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0197-2456(89)90005-6)
 69. *Coray A. G., Subach B. R., Glassman S. D., Polly D. W., Schuler T. C.* Understanding the minimum clinically important difference: A review of concepts and methods // *The Spine Journal*. 2007. Vol. 7, iss. 5. P. 541–546. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2007.01.008>
 70. *Донник А. М., Иванов Д. В., Коссович Л. Ю., Левченко К. К., Киреев С. И., Морозов К. М., Островский Н. В., Зарецков В. В., Лихачев С. В.* Создание трехмерных твердотельных моделей позвоночника с транспедикулярной фиксацией с использованием специализированного программного обеспечения // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 424–438. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-424-438>
 71. *Донник А. М., Иванов Д. В., Киреев С. И., Коссович Л. Ю., Островский Н. В., Норкин И. А., Левченко К. К., Лихачев С. В.* Извлечение клинически значимых данных из



- биомеханического моделирования вариантов хирургического лечения травмы позвоночника при повреждении позвонков ТН10, ТН11 // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 439–453. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-439-453>
72. Доль А. В., Доль Е. С., Иванов Д. В. Биомеханическое моделирование вариантов хирургического реконструктивного лечения спондилолистеза позвоночника на уровне L4-L5 // Российский журнал биомеханики. 2018. Т. 22, № 1. С. 31–44. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2018.1.00>
73. Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Голядкина А. А., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Сидоренко Д. А. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 2. С. 118–133. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01>
74. Доль А. В., Иванов Д. В., Кажанов И. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Микитюк С. И., Петров А. В. Биомеханическое моделирование вариантов хирургического реконструктивного лечения односторонних переломов крестца // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 4. С. 537–548. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.4.04>
75. Денисов А. О., Шильников В. А., Барнс С. А. Коксо-verteбральный синдром и его значение при эндопротезировании тазобедренного сустава (обзор литературы) // Травматология и ортопедия России. 2012. Т. 18, вып. 1. С. 121–127. <https://doi.org/10.21823/2311-2905-2012-0-1-144-149>

References

1. R. M. Tikhilov, I. I. Shubnyakov, D. G. Pliev, eds. *Rukovodstvo po khirurgii tazobedrennogo sustava* [Guide to Hip Surgery: in 2 vols.]. Vol. 2. St. Petersburg, RNIITO im. R. R. Vredena, 2015. 356 p. (in Russian).
2. Dictionary of the Russian Language (Ozhegov) online. Available at: <https://slovarozhegova.ru/> (accessed 04 August 2021) (in Russian).
3. Werner D. A. T., Grotle M., Gulati S., Austevoll I. M., Madsbu M. A., Lønne G., Solberg T. K. Can a Successful Outcome After Surgery for Lumbar Disc Herniation Be Defined by the Oswestry Disability Index Raw Score? *Global Spine Journal*, 2020, vol. 10, iss. 1, pp. 47–54. <https://doi.org/10.1177/2192568219851480>
4. Mjåset C., Zwart J. A., Goedmakers C. M. W., Smith T. R., Solberg T. K., Grotle M. Criteria for success after surgery for cervical radiculopathy—estimates for a substantial amount of improvement in core outcome measures. *The Spine Journal*, 2020, vol. 20, iss. 9, pp. 1413–1421. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2020.05.549>
5. Alhaug O. K., Dolatowski F. C., Solberg T. K., Lønne G. Criteria for failure and worsening after surgery for lumbar spinal stenosis: A prospective national spine registry observational study. *The Spine Journal*, 2021, vol. 21, iss. 9, pp. 1489–1496. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2021.04.008>
6. Duval-Beaupère G., Schmidt C., Cosson P. A Barycentremetric study of the sagittal shape of spine and pelvis: The conditions required for an economic standing position. *Annals of Biomedical Engineering*, 1992, vol. 20, iss. 4, pp. 451–462. <https://doi.org/10.1007/BF02368136>
7. Le Huec J. C., Hasegawa K. Normative values for the spine shape parameters using 3D standing analysis from a database of 268 asymptomatic Caucasian and Japanese subjects. *European Spine Journal*, 2016, vol. 25, iss. 11, pp. 3630–3637. <https://doi.org/10.1007/s00586-016-4485-5>
8. Schwab F., Lafage V., Patel A., Farcy J.-P. Sagittal plane considerations and the pelvis in the adult patient. *Spine*, 2009, vol. 34, iss. 17, pp. 1828–1833. <https://doi.org/10.1097/brs.0b013e3181a13c08>



9. Krutko A. V. *Sagittal'nyi balans. Garmoniya v formulakh. Spravochnaya informatsiya dlya prakticheskikh raschetov* [Sagittal Balance. Harmony in Formulas, Background Information for Practical Calculations]. Novosibirsk, ANO "Klinika NIITO", 2016. 67 p. (in Russian).
10. Tikhilov R. M., Nikolaev N. S., Shubnyakov I. I., Myasoedov A. A., Boyarov A. A., Efimov A. V., Syundyukov A. R. Difficulties of total hip replacement in patients with ankylosing spondylitis (case report). *Traumatology and Orthopedics of Russia*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 70–79 (in Russian). <https://doi.org/10.21823/2311-2905-2016-0-2-70-79>
11. Makirov S. K., Yuz A. A., Jahaf M. T. Method of assessing the parameters of the sagittal spinal pelvic balance. *Hirurgiâ pozvonočnika (Spine Surgery)*, 2015, vol. 12, no. 3, pp. 55–63 (in Russian). <https://doi.org/10.14531/ss2015.3.55-63>
12. Kudyashev A. L., Hominets V. V., Teremshonok A. V., Korostelev K. E., Nagorny E. B., Dol A. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Biomechanical background for the formation of proximal junctional kyphosis after the transpedicular fixation of the lumbarian spine. *Russian Journal of Biomechanics*, 2017, vol. 21, iss. 3, pp. 270–279. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2017.3.07>
13. Kim Y. J., Lenke L. G., Bridwell K. H., Kim J., Cho S. K., Cheh G., Yoon J. Proximal junctional kyphosis in adolescent idiopathic scoliosis after 3 different types of posterior segmental spinal instrumentation and fusions: Incidence and risk factor analysis of 410 cases. *Spine*, 2007, vol. 32, iss. 24, pp. 2731–2738. <https://doi.org/10.1097/BRS.0b013e31815a7ead>
14. Le Huec J. C., Charosky S., Barrey C., Rigal J., Aunoble S. Sagittal imbalance cascade for simple degenerative spine and consequences: Algorithm of decision for appropriate treatment. *European Spine Journal*, 2011, vol. 20, suppl. 5, pp. 699–703. <https://doi.org/10.1007/s00586-011-1938-8>
15. Johnson R. D., Valore A., Villaminar A., Comisso M., Balsano M. Sagittal balance and pelvic parameters — a paradigm shift in spinal surgery. *Journal of Clinical Neuroscience*, 2013, vol. 20, iss. 2, pp. 191–196. <https://doi.org/10.1016/j.jocn.2012.05.023>
16. Kotelnikov A. O., Riabykh S. O., Burtsev A. V. Hip-spine syndrome: The problem from the biomechanical point of view. *Genij Ortopedii*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 541–549 (in Russian). <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-4-541-549>
17. Burtsev A. V., Ryabykh S. O., Kotelnikov A. O., Gubin A. V. Clinical issues of the sagittal balance in adults. *Genij Ortopedii*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 228–235 (in Russian). <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2017-23-2-228-235>
18. Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Likhachev S. V., Polienko A. V., Kharlamov A. V., Shulga A. E. Comparative analysis of the SpinoMeter mobile application and Surgimap system for measuring the sagittal balance parameters: Inter-observer reliability test. *Genij Ortopedii*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 74–79 (in Russian). <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2021-27-1-74-79>
19. Pan C., Wang G., Sun J. Correlation between the apex of lumbar lordosis and pelvic incidence in asymptomatic adult. *European Spine Journal*, 2020, vol. 29, iss. 3, pp. 420–427. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-06183-y>
20. Legaye J., Duval-Beaupère G. Sagittal plane alignment of the spine and gravity: A radiological and clinical evaluation. *Acta Orthopaedica Belgica*, 2005, vol. 71, iss. 2, pp. 213–220.
21. Vialle R., Levassor N., Rillardon L., Templier A., Skalli W., Guigui P. Radiographic analysis of the sagittal alignment and balance of the spine in asymptomatic subjects. *Journal of Bone & Joint Surgery*, 2005, vol. 87, iss. 2, pp. 260–267. <https://doi.org/10.2106/JBJS.D.02043>
22. Hyun S.-J., Han S., Kim Y. B., Kim Y. J., Kang G.-B., Cheong J.-Y. Predictive formula of ideal lumbar lordosis and lower lumbar lordosis determined by individual pelvic incidence in asymptomatic elderly population. *European Spine Journal*, 2019, vol. 28, iss. 9, pp. 1906–1913. <https://doi.org/10.1007/s00586-019-05955-w>
23. Sullivan T. B., Marino N., Reighard F. G., Newton P. O. Relationship between lumbar lordosis and pelvic incidence in the adolescent patient: Normal cohort analysis and literature



- comparison. *Spine Deformity*, 2018, vol. 6, iss. 5, pp. 529–536. <https://doi.org/10.1016/j.jspd.2018.02.002>
24. Manoharan S. R., Joshi D., Owen M., Theiss S. M., Deinlein D. Relationship of Cervical Sagittal Vertical Alignment After Sagittal Balance Correction in Adult Spinal Deformity: A Retrospective Radiographic Study. *International Journal of Spine Surgery*, 2018, vol. 12, no. 2, pp. 269–275. <https://doi.org/10.14444/5033>
 25. Yeh K.-T., Lee R.-P., Chen I.-H., Yu T.-C., Liu K.-L., Peng C.-H., Wang J.-H., Wu W.-T. Correlation of Functional Outcomes and Sagittal Alignment After Long Instrumented Fusion for Degenerative Thoracolumbar Spinal Disease. *Spine*, 2018, vol. 43, iss. 19, pp. 1355–1362. <https://doi.org/10.1097/BRS.0000000000002471>
 26. Than K. D., Park P., Fu K.-M., Nguyen S., Wang M. Y., Chou D., Nunley P. D., Anand N., Fessler R. G., Shaffrey C. I., Bess S., Akbarnia B. A., Deviren V., Uribe J. S., La Marca F., Kanter A. S., Okonkwo D. O., Mundis G. M., Mummaneni P. V. Clinical and radiographic parameters associated with best versus worst clinical outcomes in minimally invasive spinal deformity surgery. *Journal of Neurosurgery*, 2016, vol. 25, iss. 1, pp. 21–25. <https://doi.org/10.3171/2015.12.SPINE15999>
 27. Kao F.-C., Huang Y.-J., Chiu P.-Y., Hsieh M.-K., Tsai T.-T. Factors predicting the surgical risk of osteoporotic vertebral compression fractures. *Journal of Clinical Medicine*, 2019, vol. 8, no. 4, pp. 501. <https://doi.org/10.3390/jcm8040501>
 28. Kornilov N. V., Voitovich A. V., Mashkov V. M., Einstein G. G. *Khirurgicheskoe lechenie degenerativno-distroficheskikh porazheniy tazobedrennogo sustava* [Surgical Treatment of Degenerative-Dystrophic Lesions of the Hip Joint]. St. Petersburg, LITO Sintez, 1997. 292 p. (in Russian).
 29. Tian J.-L., Sun L., Hu R.-Y., Han W., Tian X.-B. Correlation of Cup Inclination Angle with Liner Wear for Metal-on-polyethylene in Hip Primary Arthroplasty. *Orthopaedic Surgery*, 2017, vol. 9, iss. 2, pp. 186–190. <https://doi.org/doi:10.1111/os.12337>
 30. Más Y., Gracia L., Ibarz E., Gabarre S., Peña D., Herrera A. Finite element simulation and clinical follow-up of lumbar spine biomechanics with dynamic fixations. *PLoS ONE*, 2017, vol. 12, no. 11, e0188328. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188328>
 31. Chun K., Yang I., Kim N., Cho D. Effect of Device Rigidity and Physiological Loading on Spinal Kinematics after Dynamic Stabilization: An In-Vitro Biomechanical Study. *Journal of Korean Neurosurgical Society*, 2015, vol. 58, no. 5, pp. 412–418. <https://doi.org/10.3340/jkns.2015.58.5.412>
 32. Clair S. St., Tan J. S., Lieberman I. Oblique lumbar interbody fixation: A biomechanical study in human spines. *Journal of Spinal Disorders and Techniques*, 2012, vol. 25, iss. 4, pp. 183–189. <https://doi.org/10.1097/BSD.0b013e318211fc6b>
 33. Niosi C. A., Zhu Q. A., Wilson D. C., Keynan O., Wilson D. R., Oxland T. R. Biomechanical characterization of the three-dimensional kinematic behaviour of the Dynesys dynamic stabilization system: An in vitro study. *European Spine Journal*, 2006, vol. 15, iss. 6, pp. 913–922. <https://doi.org/10.1007/s00586-005-0948-9>
 34. White III A. A., Panjabi M. M. *Clinical Biomechanics of the Spine*. 2nd ed. New York, J. B. LIPPINCOTT Company, 1990. 722 p.
 35. Brown T., Hansen R. J., Yorra A. J. Some mechanical tests on the lumbosacral spine with particular reference to the intervertebral discs; A preliminary report. *The Journal of Bone and Joint Surgery. American volume*, 1957, vol. 39-A, iss. 5, pp. 1135–1164.
 36. Inoue N., Espinoza Orfías A. A. Biomechanics of intervertebral disk degeneration. *Orthopedic Clinics of North America*, 2011, vol. 42, iss. 4, pp. 487–499. <https://doi.org/10.1016/j.ocl.2011.07.001>
 37. Hansson T. H., Keller T. S., Panjabi M. M. A study of the compressive properties of lumbar vertebral trabeculae: Effects of tissue characteristics. *Spine*, 1987, vol. 12, iss. 1, pp. 56–62. <https://doi.org/10.1097/00007632-198701000-00011>



38. Baikov E. S., Baikalov A. A. Relationship between biomechanical and biochemical parameters of spinal motion segments and recurrent lumbar disc herniation. *Hirurgiâ pozvonočnika (Spine Surgery)*, 2017, vol. 14, no. 4, pp. 61–68 (in Russian). <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.61-68>
39. Natarajan R. N., Watanabe K., Hasegawa K. Biomechanical analysis of a long-segment fusion in a lumbar spine — a finite element model study. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2018, vol. 140, iss. 9, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1115/1.4039989>
40. Shin J. K., Lim B. Y., Goh T. S., Son S. M., Kim H.-S., Lee J. S., Lee C.-S. Effect of the screw type (S2-alar-iliac and iliac), screw length, and screw head angle on the risk of screw and adjacent bone failures after a spinopelvic fixation technique: A finite element analysis. *PLoS ONE*, 2018, vol. 13, no. 8, pp. 296–301. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201801>
41. Duan Y., Wang H. H., Jin A. M., Zhang L., Min S. X., Liu C. L., Qiu S. J., Shu X. Q. Finite element analysis of posterior cervical fixation. *Orthopaedics & Traumatology: Surgery & Research*, 2015, vol. 101, iss. 1, pp. 23–29. <https://doi.org/10.1016/j.otsr.2014.11.007>
42. Kudiashev A. L., Khominets V. V., Teremshonok A. V., Nagorny E. B., Stadnichenko S. Yu., Dol A. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Kovtun A. L. Biomechanical modeling in surgical treatment of a patient with true lumbar spondylolisthesis. *Hirurgiâ pozvonočnika (Spine Surgery)*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 87–94 (in Russian). <https://doi.org/10.14531/2018.4.87-94>
43. La Barbera L., Galbusera F., Villa T., Costa F., Wilke H.-J. ASTM F1717 standard for the preclinical evaluation of posterior spinal fixators: Can we improve it? *Journal of Engineering in Medicine*, 2014, vol. 228, iss. 10, pp. 1014–1026. <https://doi.org/10.1177/0954411914554244>
44. Su Y.-S., Ren D., Wang P.-C. Comparison of biomechanical properties of single- and two-segment fusion for denis type B spinal fractures. *Orthopaedic Surgery*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 266–273. <https://doi.org/10.1111/os.12068>
45. *Vessels and apparatus. Norms and methods of strength calculation. General requirements.* Moscow, Standartinform, 2008. 26 p. (in Russian).
46. *316LS/316LVM Surgical Stainless Steel Bar — ASTM F138.* Available at: <https://www.upmet.com/products/stainless-steel/316lslvm> (accessed 17 August 2018).
47. *Ti6Al4V ELI Titanium Alloy.* Available at: <https://www.arcam.com/wp-content/uploads/Arcam-Ti6Al4V-ELI-Titanium-Alloy.pdf> (accessed 17 August 2018).
48. Havaldar R., Pilli S. C., Putti B. B. Insights into the effects of tensile and compressive loadings on human femur bone. *Advanced Biomedical Research*, 2014, vol. 3, pp. 101. <https://doi.org/10.4103/2277-9175.129375>
49. Karlov A. V., Shakhov V. P. *Sistemy vneshnei fiksatsii i regulatornye mekhanizmy optimal'noi biomekhaniki* [External Fixation Systems and Regulatory Mechanisms for Optimal Biomechanics]. Tomsk, STT, 2001. 477 p. (in Russian).
50. Misch C. E., Qu Z., Bidez M. W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement. *Journal of Oral and Maxillofacial Surgery*, 1999, vol. 57, iss. 6, pp. 700–706. [https://doi.org/10.1016/s0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/s0278-2391(99)90437-8)
51. Goldstein S. A. The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function. *Journal of Biomechanics*, 1987, vol. 20, iss. 11, pp. 1055–1061. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(87\)90023-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(87)90023-6)
52. Gushcha A. O., Yusupova A. R. Evaluation of outcomes of surgical treatment for degenerative diseases of the spine. *Hirurgiâ pozvonočnika (Spine Surgery)*, 2017, vol. 14, no. 4, pp. 85–94 (in Russian). <https://doi.org/10.14531/ss2017.4.85-94>
53. Byvaltsev V. A., Belykh E. G., Alekseeva N. V., Sorokovikov V. A. *Primenenie shkal i anket v obsledovanii patsientov s degenerativnym porazheniem poiasnichnogo otdela pozvonochnika: metodicheskie rekomendatsii* [The Use of Scales and Questionnaires in



- the Examination of Patients with Degenerative Lesions of the Lumbar Spine: Guidelines]. Irkutsk, FGBU "NTsRVKh" SO RAMN, 2013. 32 p. (in Russian).
54. Cao P., Hao W., Zhang L., Zhang Q., Liu X., Li M. Safety and Efficacy Studies of Vertebroplasty with Dual Injections for the Treatment of Osteoporotic Vertebral Compression Fractures: Preliminary Report. *Academic Radiology*, 2020, vol. 27, iss. 8, pp. e224–e231. <https://doi.org/10.1016/j.acra.2019.09.023>
 55. Cook C. E., Learman K. E., O'Halloran B. J., Showalter C. R., Kabbaz V. J., Goode A. P., Wright A. A. Wright Which Prognostic Factors for Low Back Pain Are Generic Predictors of Outcome Across a Range of Recovery Domains? *PTJ: Physical Therapy & Rehabilitation Journal*, 2013, vol. 93, iss. 1, pp. 32–40. <https://doi.org/10.2522/ptj.20120216>
 56. Cheng L., Cai H., Yu Y., Li W., Li Q., Liu Z. Modified Full-Endoscopic Interlaminar Discectomy via an Inferior Endplate Approach for Lumbar Disc Herniation: Retrospective 3-Year Results from 321 Patients. *World Neurosurgery*, 2020, vol. 141, pp. e537–e544. <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2020.05.234>
 57. Marouby S., Coulomb R., Maury E., Assi C., Mares O., Kouyoumdjian P. Prospective Evaluation of Spino-Pelvic Parameters with Clinical Correlation in Patients Operated with an Anterior Lumbar Interbody Fusion. *Asian Spine Journal*, 2020, vol. 14, no. 1, pp. 88–96. <https://doi.org/10.31616/asj.2019.0041>
 58. Staartjes V. E., Vergroesen P. A., Zeilstra D. J., Schröder M. L. Identifying subsets of patients with single-level degenerative disc disease for lumbar fusion: The value of prognostic tests in surgical decision making. *The Spine Journal*, 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 558–566. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2017.08.242>
 59. Vieli M., Staartjes V. E., Eversdijk H. A. J., De Wispelaere M. P., Oosterhuis J. W. A., Schröder M. L. Safety and Efficacy of Anterior Lumbar Interbody Fusion for Discogenic Chronic Low Back Pain in a Short-stay Setting: Data From a Prospective Registry. *Cureus*, 2019, vol. 11, no. 8. e5332. <https://doi.org/10.7759/cureus.5332>
 60. Ertzgaard P., Nene A., Kiekens C., Burns A. S. A review and evaluation of patient-reported outcome measures for spasticity in persons with spinal cord damage: Recommendations from the Ability Network — an international initiative. *The Journal of Spinal Cord Medicine*, 2020, vol. 43, iss. 6, pp. 813–823. <https://doi.org/10.1080/10790268.2019.1575533>
 61. Amirdjanova V. N., Goryachev D. V., Korshunov N. I., Rebrov A. P., Sorotskaya V. N. SF-36 questionnaire population quality of life indices. *Nauchno-prakticheskaya revmatologiya [Rheumatology Science and Practice]*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 36–48 (in Russian).
 62. Gary K. W., Cao Y., Burns S. P., McDonald S. D., Krause J. S. Employment, health outcomes, and life satisfaction after spinal cord injury: Comparison of veterans and nonveterans. *Spinal Cord*, 2020, vol. 58, no. 1, pp. 3–10. <https://doi.org/10.1038/s41393-019-0334-9>
 63. Kolesnikov S. V., Diachkova G. V., Kamshilov B. V., Kolesnikova E. S. Evaluation of clinical and functional status of patients following total hip replacement. *Genij Ortopedii*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–37 (in Russian). <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-1-32-37>
 64. Wright J. G., Rudicel S., Feinstein A. R. Ask patients what they want. Evaluation of individual complaints before total hip replacement. *The Journal of Bone and Joint Surgery*, 1994, vol. 76, no. 2, pp. 229–234.
 65. Dulaev A. K., Kazhanov I. V., Presnov R. A., Mikityuk S. I. Triangular osteosynthesis of fractures of the sacrum in vertically unstable pelvic ring injuries. *Polytrauma*, 2018, no. 2, pp. 17–34 (in Russian).
 66. Fairbank J. C., Pynsent P. B. The Oswestry Disability Index. *Spine*, 2000, vol. 25, iss. 22, pp. 2940–2952. <https://doi.org/10.1097/00007632-200011150-00017>
 67. Solberg T., Johnsen L. G., Nygaard Ø. P., Grotle M. Can we define success criteria for lumbar disc surgery? Estimates for a substantial amount of improvement in core outcome measures. *Acta Orthopaedica*, 2013, vol. 84, iss. 2, pp. 196–201. <https://doi.org/10.3109/17453674.2013.786634>



68. Jaeschke R., Singer J., Guyatt G. H. Measurement of health status: Ascertaining the minimal clinically important difference. *Controlled Clinical Trials*, 1989, vol. 10, iss. 4, pp. 407–415. [https://doi.org/10.1016/0197-2456\(89\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0197-2456(89)90005-6)
69. Copay A. G., Subach B. R., Glassman S. D., Polly D. W., Schuler T. C. Understanding the minimum clinically important difference: A review of concepts and methods. *The Spine Journal*, 2007, vol. 7, iss. 5, pp. 541–546. <https://doi.org/10.1016/j.spinee.2007.01.008>
70. Donnik A. M., Ivanov D. V., Kossovich L. Yu., Levchenko K. K., Kireev S. I., Morozov K. M., Ostrovsky N. V., Zaretskov V. V., Likhachev S. V. Creation of Three-Dimensional Solid-State Models of a Spine with Transpedicular Fixation Using a Specialized Software. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 424–438 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-424-438>
71. Donnik A. M., Ivanov D. V., Kireev S. I., Kossovich L. Yu., Ostrovsky N. V., Norokin I. A., Levchenko K. K., Likhachev S. V. Extracting Clinically Relevant Data from Biomechanical Modeling of Surgical Treatment Options for Spinal Injury in Damaged Vertebrae Th10, Th11. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 439–453 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-439-453>
72. Dol A. V., Dol E. S., Ivanov D. V. Biomechanical modeling of surgical reconstructive treatment of spinal spondylolisthesis at L4–L5 level. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 25–36. <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2018.1.03>
73. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dol A. V., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Sidorenko D. A. Development of a decision support system in traumatology and orthopedics. Biomechanics as a tool for preoperative planning. *Russian Journal of Biomechanics*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 99–112. <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2021.2.01>
74. Dol A. V., Ivanov D. V., Kazhanov I. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Miki-tyuk S. I., Petrov A. V. Biomechanical modeling of surgical reconstructive treatment options for unilateral sacral fractures. *Russian Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 459–468. <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2019.4.04>
75. Denisov A. O., Shilnikov V. A., Barns S. A. Coxa-vertebral syndrome and its significance in hip arthroplasty (review). *Traumatology and Orthopedics of Russia*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 121–127 (in Russian). <https://doi.org/10.21823/2311-2905-2012-0-1-144-149>

Поступила в редакцию / Received 20.10.2021

Принята к публикации / Accepted 14.11.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 90–102

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 90–102

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>

Научная статья

УДК 514.86+533+537

Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газозвеси

А. Л. Тукмаков, Д. А. Тукмаков[✉]

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр РАН», Россия, 420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31

Тукмаков Алексей Львович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, tukmakov@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8570-4140>

Тукмаков Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>

Аннотация. Работа посвящена исследованию закономерностей осаждения частиц дисперсной фазы электрически заряженной запыленной среды, движущейся в канале, на пластину-электрод. Целью исследования является выявление влияния размера дисперсных включений и плотности материала частиц на процесс оседания фракций полидисперсной газозвеси на поверхности пластины-электрода. При моделировании динамики газозвеси применялась математическая модель движения многоскоростной и многотемпературной полидисперсной двухфазной среды, учитывающая межфазное силовое взаимодействие и межфазный теплообмен. При описании силового взаимодействия учитывалась сила Стокса. Математическая модель динамики двухфазной среды дополнялась граничными условиями. Система уравнений решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, имеющим второй порядок точности. Для получения монотонного численного решения применялась схема коррекции сеточной функции. Для потенциала электрического поля на боковых поверхностях определялись значения потенциала, на открытых концах канала для потенциала электрического поля предполагались однородные граничные условия Неймана. В работе рассматривались газозвеси, дисперсная фаза которых содержит три фракции. При одинаковом размере фракции газозвеси отличались плотностью материала частиц фракций. При одинаковой плотности материала частиц фракции твердой фазы газозвеси имели различный размер дисперсных включений. В результате численного моделирования было выявлено, каким образом плотность материала дисперсной фазы и размер частиц оказывают влияние на процесс осаждения фракций дисперсной фазы двухкомпонентной смеси. Из расчетов следует, что при одинаковом размере частиц более интенсивно осаждаются частицы с большей плотностью материала, а при одинаковой плотности материала частиц более интенсивно осаждаются частицы с большим линейным размером.

Ключевые слова: численное моделирование, газозвесь, вязкий газ, электрическое поле

Благодарности: Математическая модель динамики электрически заряженного аэрозоля в канале разработана в рамках государственного задания ФИЦ КазНЦ РАН, расчеты влияния свойств дисперсной фазы на осаждение аэрозоля в канале выполнены при поддержке гранта Президента РФ № МК-297.2020.1.

Для цитирования: Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газозвеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.



Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 90–102. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged polydisperse gas suspension

A. L. Tukmakov, D. A. Tukmakov✉

Federal Research Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, 2/31 Lobachevsky St., Kazan 420111, Russia

Aleksey L. Tukmakov, tukmakov@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8570-4140>

Dmytry A. Tukmakov, tukmakovda@imm.knc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0335-8548>

Abstract. The work is devoted to the study of the laws governing the deposition of particles of the dispersed phase of an electrically charged dusty medium moving in a channel onto an electrode plate. The aim of the study is to reveal the influence of the size of dispersed inclusions and the density of the material of particles on the process of settling of fractions of a polydisperse gas suspension on the surface of the electrode plate. When modeling the dynamics of a gas suspension, a mathematical model of the motion of a multi-speed and multi-temperature polydisperse two-phase medium was used, taking into account the interphase force interaction and interphase heat transfer. When describing the force interaction, the Stokes force was taken into account. The mathematical model of the dynamics of a two-phase medium was supplemented with boundary conditions. The system of equations was solved by the McCormack explicit finite-difference method having the second order of accuracy. To obtain a monotonic numerical solution, a grid function correction scheme was applied. For the potential of the electric field on the lateral surfaces, the values of the potential were determined; at the open ends of the channel for the potential of the electric field, uniform Neumann boundary conditions were assumed. The paper considered gas suspension, the dispersed phase of which contains three fractions. At the same size, the gas suspension fractions differed in the material density of the particles of the fractions. At the same density of the material of particles, the fractions of the solid phase of the gas suspension had different sizes of dispersed inclusions. As a result of numerical modeling, it was revealed how the density of the material of the dispersed phase and the size of the particles affect the process of precipitation of fractions of the dispersed phase of the two-component mixture. From calculations it follows that with the same particle size, particles with a higher density of the material are deposited more intensively, and with the same density of the particle material, particles with a large linear size are deposited more intensively.

Keywords: numerical simulation, gas suspension, viscous gas, electric field

Acknowledgements: The mathematical model of the dynamics of an electrically charged aerosol in the channel was developed within the framework of the state assignment of the FRC KazanSC of RAS, calculations of the effect of the properties of the dispersed phase on the deposition of aerosol in the channel were carried out at the expense of the grant of the President of the Russian Federation No. MK-297.2020.1.

For citation: Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Numerical study of the influence of the parameters of dispersed particles on the deposition of the solid phase of an electrically charged



polydisperse gas suspension. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 90–102 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-90-102>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Одним из разделов современной механики жидкости и газа является механика неоднородных сред. В случае если компоненты таких сред имеют различное агрегатное состояние, то такие среды называют многофазными [1–24]. В ряде приложений, таких как напыление на поверхности покрытий, а также очистка промышленных выбросов, возникает необходимость исследования динамики дисперсных потоков, движущихся как под действием аэродинамических сил, так и под влиянием сил электрической природы. Так как аэрозоли являются гетерогенными смесями — содержат компоненты с различными агрегатными состояниями, для моделирования таких процессов необходимо применение механики многофазных сред. Общая теория гидродинамики многофазных сред представлена в работе [1], монографии [2, 3] посвящены методике численного моделирования ударно-волновой динамики газозвесей. В статье [4] представлена математическая модель течения электрически заряженной запыленной среды, реализующая континуальный подход в моделировании многофазных сред [1]. Работа [5] посвящена сопоставлению аналитических расчетов динамики газозвеси с численными расчетами, проведенными на основе математической модели, учитывающей вязкость несущей среды. В работе [6] проводилось экспериментальное исследование массопереноса дисперсной компоненты пылевой плазмы применительно к напылению покрытий на поверхности. В статье [7] осуществлено численное моделирование динамики нестационарных течений пылевой плазмы без учета влияния вязкости несущей среды. В работе [8] исследовано влияние нелинейностей теплофизических параметров и фазовых переходов плавления и испарения на электрические и тепловые процессы при нагреве металлического электрода сильным импульсом. В работе [9] исследована динамика пылевых взвесей в горных выработках и разработана математическая модель процесса пылеподавления. В публикации [10] теоретически и экспериментально исследовано улавливание мелкодисперсных аэрозолей волокнистыми фильтрами, выявлено, что при повышении скорости потока процесс улавливания дисперсных частиц волокнистыми фильтрами существенно ухудшается. Статья [11] посвящена усовершенствованию технологии электрических фильтров, очищающих газовые выбросы промышленных предприятий от дисперсных примесей. В статье [12] проводится сопоставление экспериментального исследования и численных расчетов течения запыленной электрически заряженной двухфазной среды в канале без учета взаимного силового влияния компонент смеси. В работе [13] экспериментально исследовано формирование самосогласованных структур в пылевой плазме. В статье [14] получено точное решение для стационарной одномерной модели динамики пузырьковых сред. В работе [15] представлен обзор теоретических и экспериментальных работ по изучению влияния дисперсных частиц на динамику газа. Данная работа посвящена выявлению закономерностей осаждения фракций полидисперсной газозвеси, движущейся в канале, на пластину, к которой приложен электрический потенциал.



1. Математическая модель

Предполагается что дисперсная фаза газозвеси состоит из нескольких фракций, отличающихся плотностью и теплоемкостью материала, а также размером частиц. Для каждой из компонент смеси решалась система уравнений, включавшая в себя уравнения неразрывности (1), уравнения сохранения компонент импульса газа (2) и импульса фракций дисперсной фазы (3), уравнения сохранения полной энергии газа (4) и уравнения сохранения тепловой энергии фракций дисперсной фазы (5) [4,25–29]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} = 0 \quad (i = 1 \dots n), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 V_1^k)}{\partial t} + \nabla^i (\rho_1 V_1^k V_1^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = - \sum_{j=2}^n F_{jk} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \nabla^k p \quad (i, k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_j V_j^k)}{\partial t} + \nabla^i (\rho_j V_j^k V_j^i) = F_{jk} - \alpha_j \nabla^k p \quad (j = 2, \dots, n, \quad i, k = 1, 2), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_1}{\partial t} + \nabla^i (V_1^i (e_1 + p - \tau_{ki}) - V_1 \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = \\ & = - \sum_{j=2}^n Q_j - \sum_{j=2}^n |F_{jk}| (V_1^k - V_j^k) \left(\sum_{j=2}^n \alpha_j \right) (p V_1^k) \quad (j = 2, \dots, n, \quad i, k = 1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial e_j}{\partial t} + \nabla^k (e_j V_j^k) = Q_j \quad (j = 2, \dots, n, \quad i, k = 1, 2), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p &= (\gamma - 1)(e_1 - \rho(u_1^2 + v_1^2)/2), \quad e_1 = \rho_1(I + (u_1^2 + v_1^2)/2), \\ \tau_{11} &= \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right), \\ D &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \quad \rho_j = \alpha_j \rho_{j0}, \quad e_j = \rho_j C_{pj} T_j. \end{aligned}$$

Математическая модель позволяет моделировать электрическое поле, генерируемое как электрическим зарядом фракций дисперсной компоненты газозвеси, так и внешними потенциалами, приложенными к моделируемой области [25–28, 30]. Несущая среда описывалась как вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ [31]. Модель полидисперсной газозвеси учитывает тепловое и силовое взаимодействие газа и фракций дисперсной фазы. В уравнениях применяются следующие обозначения: ρ_j — плотности (для несущей среды плотность газа, а для фракций дисперсной фазы «средние плотности»), u_j, v_j — составляющие векторов скорости V_j , e_j и T_j энергия и температура компонент смеси. Индекс «1» относится к физическим величинам несущей среды (газа), индекс « j » ($j > 1$) — к физическим величинам фракций дисперсной компоненты смеси. Здесь λ, μ, γ — коэффициенты теплопроводности, вязкости и постоянная адиабаты для несущей газообразной среды, $I = RT_1/(\gamma - 1)$ — внутренняя энергия несущей среды (R — газовая постоянная), $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ — составляющие тензора вязких напряжений несущей среды. Составляющие вектора межфазного силового взаимодействия j -ой фракции $F_{x_{1j}}, F_{x_{2j}}$ и тепловой поток с поверхности j -ой фракции дисперсной фазы Q_j определяются законами межфазного взаимодействия.

Здесь α_j — объемное содержание; C_{pj} , ρ_{j0} — удельная теплоемкость и физическая плотность вещества твердых частиц j -ой фракции дисперсной фазы, r_j — радиус частиц j -ой фракции дисперсной фазы, предполагается, что все частицы имеют сферическую форму. Компоненты силового межфазного взаимодействия между газовой компонентой смеси и j -ой фракцией — F_{xj} и F_{yj} — определяются следующим образом [1, 2]:

$$F_{x1j} = \frac{3\alpha}{8r_j} C_{dj} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_j)^2 + ((v_1 - v_j)^2 (u_1 - u_j) + F_{Ex1j}},$$

$$F_{x2j} = \frac{3\alpha}{8r_j} C_{dj} \rho \sqrt{(u_1 - u_j)^2 + ((v_1 - v_j)^2 (v_1 - v_j) + F_{Ex2j}}.$$

Межфазный теплообмен описывается выражением

$$Q_j = 6\alpha_j \lambda \text{Nu}_{1j} (T_1 - T_j) / (2r_j)^2.$$

Математические модели аэродинамики запыленных и газочапельных сред представлены в работе [2]. Силовое взаимодействие компонент смеси задается коэффициентом сопротивления C_{dj} . Тепловое и силовое взаимодействие составляющих газозвеси определяются [2] относительным числом Маха M_{1j} , относительным числом Рейнольдса Re_{1j} , относительным числом Нуссельта Nu_{1j} и числом Прандтля Pr_1 :

$$C_{dj} = C_{dj}^0 \phi(M_{1j}) \eta(\alpha_j), \quad C_{dj}^0 = \frac{24}{\text{Re}_{1j}} + \frac{4}{\text{Re}_{1j}^{0.5}} + 0.4,$$

$$\phi(M_{1j}) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_{1j}^{0.63}}\right), \quad \eta(\alpha_j) = (1 - \alpha_j)^{-2.5},$$

$$\text{Re}_{1j} = r_j \rho_1 |V_1 - V_j| / \mu, \quad M_{1j} = |V_1 - V_j|, \quad \text{Pr}_1 = c_{p1} \mu(\lambda)^{-1},$$

$$\text{Nu}_{1j} = 2 \exp(-M_{1j}) + 0.459 \text{Re}_{1j}^{0.55} \text{Pr}_1^{0.33},$$

$V_j = [u_j, v_j]$, $j = 1, n$ — векторы скоростей несущей среды и фракций дисперсной компоненты. Для скорости несущей среды задавались однородные граничные условия Неймана в начале канала и на выходе из канала, а также однородные граничные условия Дирихле на стенках канала. Для составляющих скорости фракций твердой компоненты смеси на входе и выходе из канала задавались однородные граничные условия Неймана. На верхней (к верхней стенке приложен положительный потенциал) поверхности канала для вертикальных составляющих скоростей фракций дисперсной фазы ставились однородные граничные условия Дирихле, на нижней поверхности канала для вертикальных составляющих скоростей фракций дисперсной фазы применялись однородные граничные условия Неймана на нижней стенке канала. Такая постановка граничных условий для вертикальных составляющих скоростей фракций дисперсной фазы позволяет описать поглощение пластиной-электродом частиц газозвеси. Для всех продольных составляющих скорости фракций дисперсной фазы на боковых поверхностях задавались однородные граничные условия Дирихле. Для остальных искомым функций на всех границах ставились однородные граничные условия Неймана. На входе в канал задавались начальные объемные содержания фракций втекающей в канал дисперсной фазы. Система уравнений динамики двухкомпонентной смеси решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [31]



второго порядка точности с применением схемы нелинейной коррекции сеточной функции [32, 33].

Составляющие силы Кулона, действующие на единицу объема j -ой фракции дисперсной фазы, определяются через ее удельный заряд, среднюю плотность фракции твердой компоненты смеси и напряженность электрического поля [4, 30]:

$$F_{Ex1j} = -\alpha_j \rho_{j0} q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad F_{Ex2j} = -\alpha_j \rho_{j0} q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона [30]:

$$\Delta \varphi = - \sum_{j=2}^n \frac{\rho_j q_0}{\epsilon_0}, \tag{6}$$

где q_0 — удельный заряд единицы массы твердой компоненты смеси, φ — потенциал электрического поля, ϵ_0 — абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха. Уравнение Пуассона, описывающее потенциал электрического поля, решалось методом конечных разностей с помощью итерационной схемы метода установления [34] на газодинамической расчетной сетке. Данная постановка численных расчетов вызвана необходимостью определения значения потенциала электрического поля при вычислении сил межфазного взаимодействия при описании динамики дисперсной и несущей компонент смеси, а также необходимостью вычисления значений средней плотности дисперсной фазы в узлах при решении уравнения Пуассона. Для потенциала электрического поля задавались однородные граничные условия Неймана на всех границах, кроме пластин-электродов, на которых задавались значения потенциалов.

2. Результаты расчетов

На рис. 1 схематично изображен канал с текущей по нему газозвесью, к стенкам канала приложены потенциалы различных знаков. Общая протяженность канала составляет $L = 1$ м. Высота канала $h = 0.1$ м. В работе предполагалось, что к нижней стенке канала приложен отрицательный потенциал — $\varphi_1 = -25000$ В, а к верхней стенке положительный потенциал — $\varphi_2 = 25000$ В: пространственное распределение потенциала электрического поля изображено на рис. 2.

Удельный массовый заряд дисперсной фазы составляет $q_0 = 10^{-3}$ Кл/кг. Общее объемное содержание дисперсной фазы $\alpha = \sum_{j=2}^n \alpha_j = 99 \cdot 10^{-6}$. В расчетах предполагалось, что $\alpha_2 = \dots = \alpha_4 = 0.00033$. Скорость втекающего в канал двухфазного потока

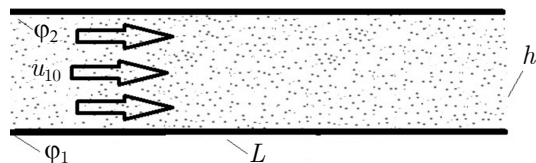


Рис. 1. Схематичное изображение канала с текущей по нему запыленной средой
Fig. 1. Schematic image of the channel with the dusty medium flowing through it

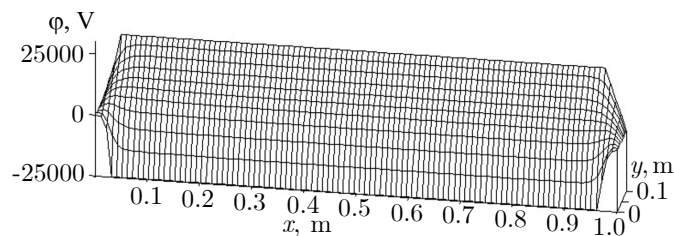


Рис. 2. Пространственное распределение потенциала электрического поля
Fig. 2. Spatial distribution of the electric field potential

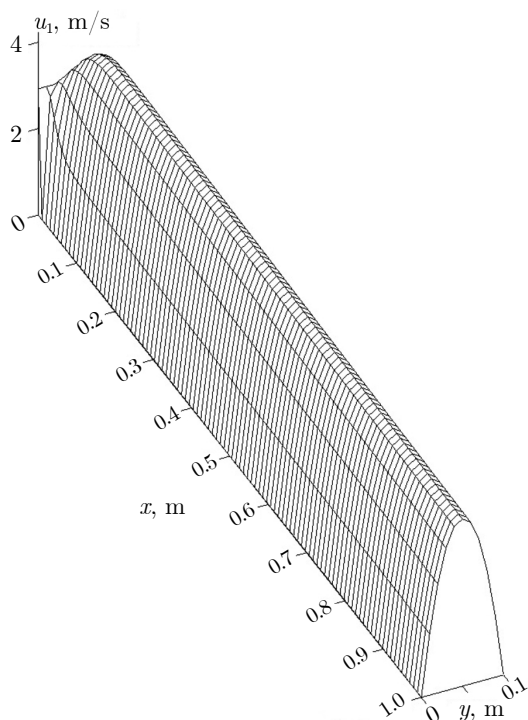


Рис. 3. Пространственное распределение продольной составляющей скорости газа в канале
Fig. 3. Spatial distribution of the longitudinal component of the gas velocity in the channel

вызванное осаждением частиц на пластину-электрод (рис. 5, а). Уменьшение объемного содержания фракций дисперсной фазы газозвеси вблизи нижней стенки канала происходит пропорционально размеру частиц. Временные зависимости объема осажденных на нижней стенке канала частиц для различных фракций дисперсной фазы демонстрируют увеличение интенсивности осаждения при увеличении размера частиц (рис. 5, б).

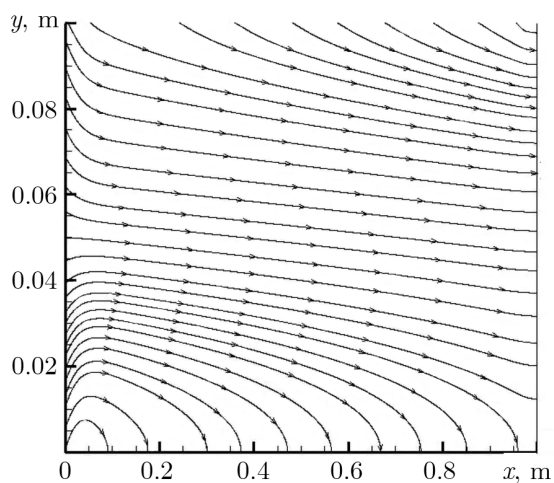


Рис. 4. Линии тока скорости фракции дисперсной компоненты смеси ($\rho_{30} = 1850 \text{ кг/м}^3$, $d = 4 \text{ мкм}$), $t = 51 \text{ мс}$
Fig. 4. Streamlines of the velocity of the fraction of the dispersed component of the mixture ($\rho_{30} = 1850 \text{ кг/м}^3$, $d = 4 \text{ мкм}$), $t = 51 \text{ мс}$

составляла $u_{10} = 4 \text{ м/с}$. Полученное численными расчетами пространственное распределение продольной составляющей скорости несущей среды представлено на рис. 3. Наибольшего значения продольная составляющая скорости газа u_1 достигает на оси симметрии канала. Распределение линий тока скорости одной из фракций дисперсной компоненты смеси (с размером частиц $d = 4 \text{ мкм}$ и плотностью материала фракции $\rho_{30} = 1850 \text{ кг/м}^3$) демонстрирует, что вблизи нижней поверхности канала скорость частиц направлена на пластину-электрод (рис. 4). На рис. 5, а, б изображены результаты численных расчетов осаждения на пластину фракций полидисперсной твердой фазы запыленной среды с одинаковой физической плотностью материала фракций и различными размерами частиц. Вблизи нижней стенки канала наблюдается уменьшение объемного содержания фракций относительно начальных объемных содержаний на входе в канал ($\alpha_{i0} = 0.00033$; $i = 2, 3, 4$),

Время осаждения на нижней стенке канала частиц для различных фракций дисперсной фазы демонстрируют увеличение интенсивности осаждения при увеличении размера частиц (рис. 5, б).
Выявленные закономерности можно объяснить тем, что увеличение размера частиц дисперсной фракции приводит к увеличению площади соприкосновения частицы и газа в квадратичной пропорции, тогда как масса частицы увеличивается в кубической пропорции. В моделируемом процессе сила Кулона, приложенная к частице, пропорциональна массе частицы, т. е. увеличивается в кубической пропорции при увеличении размера частицы.

Рассмотрим влияние плотности материала вещества электрически заряженной запыленной среды на процесс напыления фракций дисперсной фазы газозвеси на пластину-электрод (рис. 6, а, б).

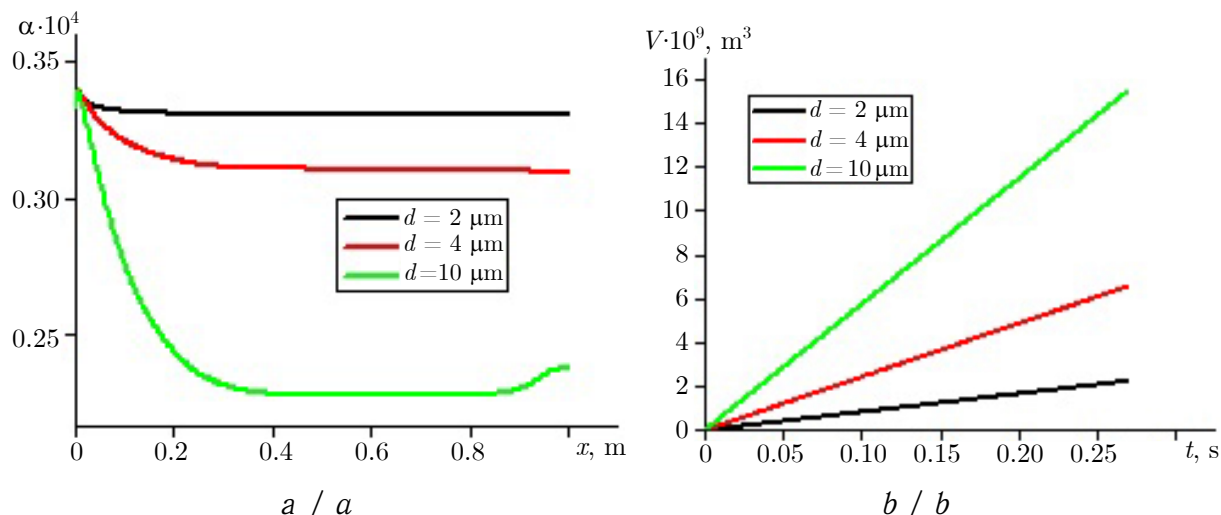


Рис. 5. Пространственное распределение объемного содержания фракций дисперсной фазы с плотностью материала $\rho_{i0} = 1850 \text{ кг/м}^3$, $i = 2, 3, 4$ вблизи нижней стенки ($y = 0.002 \text{ м}$, момент времени $t = 51 \text{ мс}$) (а). Временная зависимость объема фракций дисперсной фазы, осажденной на нижнюю стенку, (б) (цвет online)

Fig. 5. Spatial distribution of the volumetric content of the dispersed phase fractions with the material density $\rho_{i0} = 1850 \text{ кг/м}^3$, $i = 2, 3, 4$ near the lower channel wall ($y = 0.002 \text{ м}$, time point $t = 51 \text{ мс}$) (a). Temporal dependence of the volume of fractions of the dispersed phase deposited on the lower channel wall (b) (color online)

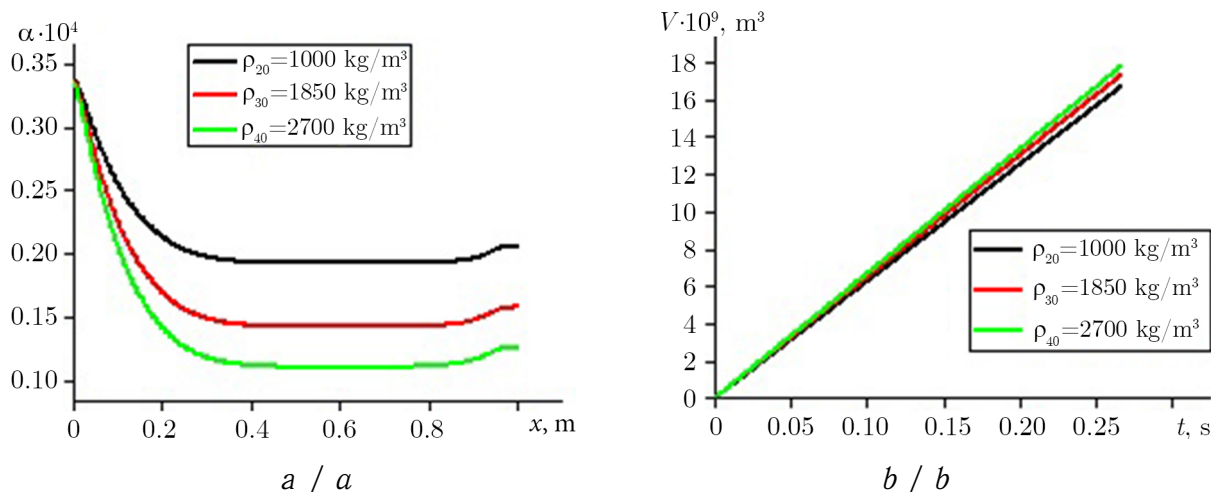


Рис. 6. Пространственное распределение объемного содержания фракций дисперсной фазы с диаметром частиц $d = 20 \text{ мкм}$ вблизи нижней стенки канала ($y = 0.002 \text{ м}$, момент времени $t = 51 \text{ мс}$) (а). Временная зависимость объема фракций дисперсной фазы с диаметром частиц $d = 20 \text{ мкм}$, осажденных на нижнюю стенку, (б) (цвет online)

Fig. 6. Spatial distribution of the volumetric content of dispersed phase fractions with a particle diameter $d = 20 \mu\text{м}$ near the lower channel wall ($y = 0.002 \text{ м}$, time $t = 51 \text{ мс}$) (a). Time dependence of the volume of dispersed phase fractions with a particle diameter $d = 20 \mu\text{м}$ deposited on the lower channel wall (b) (color online)



При одинаковом размере частиц ($d = 20$ мкм) фракции с более плотным материалом дисперсных включений имеют меньшее объемное содержание вблизи электрода ($y = 0.002$) (рис. 6, а). Фракции частиц с более плотным материалом имеют большую скорость напыления на поверхность нижней стенки канала (рис. 6, б). Выявленные особенности осаждения на поверхность пластины полидисперсной газозвеси связаны с тем, что при одинаковом размере частиц более плотные частицы имеют большую массу, по этой причине такие частицы испытывают большее воздействие силы Кулона при одинаковой площади взаимодействия с газом.

Выводы

В работе численно моделировался процесс осаждения на пластину-электрод электрически заряженной полидисперсной запыленной среды. Исследовано влияние плотности материала частиц и их размера на процесс осаждения фракций дисперсной фазы двухкомпонентной смеси. Частицы больших размеров осаждаются более интенсивно. При одинаковом размере частиц более интенсивно осаждаются частицы с большей плотностью материала. Мелкодисперсные частицы более подвержены воздействию аэродинамических сил, по этой причине сносятся потоком газа и осаждаются на пластину-электрод менее интенсивно, тогда как динамика крупнодисперсных частиц в большей степени определяется электрическим полем.

Список литературы

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. Москва : Наука, 1978. 336 с.
2. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. Санкт-Петербург : Недра, 2003. 284 с.
3. Федоров А. В., Фомин В. М., Хмель Т. А. Волновые процессы в газозвесах частиц металлов. Новосибирск : Параллель, 2015. 301 с.
4. Тукмаков А. Л. Численная модель электрогазодинамики аэродисперсной системы на основе уравнений движения двухскоростной двухтемпературной газозвеси // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 4. С. 112–120. <https://doi.org/10.15372/PMTF20150411>
5. Hayakawa H., Takada S., Garzo V. Kinetic theory of shear thickening for a moderately dense gas-solid suspension: From discontinuous thickening to continuous thickening // Physical Review E. 2017. Vol. 96, iss. 4. 042903. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042903>
6. Зинченко С. П., Толмачёв Г. Н. О накоплении продуктов распыления сегнетоэлектрической мишени в плазме тлеющего высокочастотного разряда // Прикладная физика. 2012. № 5. С. 53–56.
7. Дикалюк А. С., Суржигов С. Т. Численное моделирование разреженной пылевой плазмы в нормальном тлеющем разряде // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, вып. 5. С. 611–619.
8. Арутюнян Р. В. Математическое моделирование тепло- и электропереноса при воздействии сильноточного импульса на электрод // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 138–144. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-138-144>
9. Косарев Н. П., Макаров В. Н., Угольников А. В., Макаров Н. В., Дылдин Г. П. Шахтная аэрология пылевых аэрозолей в условиях гидровихревой коагуляции // Известия Уральского государственного горного университета. 2020. Вып. 4 (60). С. 155–165. <https://doi.org/10.21440/2307-2091-2020-4-155-165>
10. Кириш А. А., Макавеев П. Ю., Кириш В. А. Улавливание металлических аэрозольных наночастиц при высокой температуре // Коллоидный журнал. 2020. Т. 82, № 2. С. 163–170. <https://doi.org/10.31857/S0023291220020056>



11. *Балашов А. М.* Способ повышения эффективности электрофильтров для очистки выбросов предприятий металлургического комплекса // Тенденции развития науки и образования. 2020. № 58-5. С. 88–91. <https://doi.org/10.18411/lj-02-2020-108>
12. *Tada Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y.* Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 778–787. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063>
13. *Jaiswal S., Hall T., LeBlanc S., Mukherjee R., Thomas E.* Effect of magnetic field on the phase transition in a dusty plasma // Physics of Plasmas. 2017. Vol. 24, iss. 11. 113703. <https://doi.org/10.1063/1.5003972>
14. *Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Агишева У. О.* Уединенные волны в газожидкостной пузырьковой смеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 232–240. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240>
15. *Вараксин А. Ю.* Влияние частиц на турбулентность несущего потока газа // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53, вып. 3. С. 441–466. <https://doi.org/10.7868/S0040364415030199>
16. *Ватузов Д. Н., Пуринг С. М.* Методика подбора и расчета аппаратов очистки воздуха от капельных аэрозолей // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2016. Т. 6, № 2 (23). С. 14–18. <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.02.3>
17. *Мешалкина М. Н., Цветков В. А., Попов Б. И.* Обнаружение пожароопасной ситуации по контролю газовыделений и наночастиц аэрозолей // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2015. № 2 (14). С. 27–33.
18. *Кутушев А. Г., Родионов С. П.* Взаимодействие слабых ударных волн со слоем порошкообразной среды // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 3. С. 131–140.
19. *Харитонов В. П.* Динамика конвективных температурных волн в сплошной пористой среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 3–11.
20. *Михайленко К. И., Кулешов В. С.* Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 46–58.
21. *Фомин В. М., Федоров А. В.* Развитие исследований по механике реагирующих гомогенных и гетерогенных сред в ИТПМ СО РАН // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51, № 2. С. 92–101.
22. *Моисеева К. М., Крайнов А. Ю.* Влияние состава угольной пыли на скорость распространения фронта горения по аэрозвеси с неоднородным распределением частиц // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10, № 2. С. 221–230. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-2-221-230>
23. *Кривенко И. В., Смирнова М. А.* Моделирование воздействия электромагнитного излучения на природные аэрозоли // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2019. Т. 22, № 4. С. 64–79. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.5>
24. *Дмитриев А. В., Дмитриева О. С., Мадышев И. Н.* Определение эффективности тепломассопереноса на контактной ступени струйно-пленочного устройства // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90, № 3. С. 685–690.
25. *Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А.* Динамика заряженной газозвеси с начальным пространственно неравномерным распределением средней плотности дисперсной фазы при переходе к равновесному состоянию // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, вып. 4. С. 509–512. <https://doi.org/10.7868/S004036441703022X>
26. *Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А.* Генерация акустического возмущения движущейся заряженной газозвесью // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 5. С. 1207–1213.
27. *Тукмаков А. Л., Кашапов Н. Ф., Тукмаков Д. А., Фазльяхматов М. Г.* Процесс осаждения заряженной полидисперсной газозвеси на поверхность пластины в элек-



- трическом поле // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56, вып. 4. С. 498–502. <https://doi.org/10.31857/S000523100002724-0>
28. Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний электрически заряженной гетерогенной среды, обусловленных межкомпонентным взаимодействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 3. С. 73–85. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-73-85>
29. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовой взвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, № 2. С. 304–310.
30. Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. Москва : Наука, 1997. 240 с.
31. Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Berlin etc. : Springer-Verlang, 1988. 502 p.
32. Тукмаков А. Л. Численное моделирование процесса волновой сепарации твердых частиц при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Акустический журнал. 2009. Т. 55, № 3. С. 342–349.
33. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.
34. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы : в 2 т. Москва : Наука, 1977. Т. 2. 401 с.

References

1. Nigmatulin R. I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p. (in Russian).
2. Kutushev A. G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical Modeling of Wave Processes in Aerodispersed and Powdery Media]. St. Petersburg, Nedra, 2003. 284 p. (in Russian).
3. Fedorov A. V., Fomin V. M., Khmel T. A. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave Processes in Gas-suspension of Metal Particles]. Novosibirsk, Parallel', 2015. 301 p. (in Russian).
4. Tukmakov A. L. Numerical model of the electro-gas-dynamics of a gas-particle system based on the equations of motion of a two-velocity two-temperature gas-particle mixture. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 636–643. <https://doi.org/10.1134/S0021894415040112>
5. Hayakawa H., Takada S., Garzó V. Kinetic theory of shear thickening for a moderately dense gas-solid suspension: From discontinuous thickening to continuous thickening. *Physical Review E*, 2017, vol. 96, iss. 4, 042903. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042903>
6. Zinchenko S. P., Tolmachev G. N. Accumulation of sputtering products of a ferroelectric target in the high-frequency glow discharge plasma. *Prikladnaya fizika*, 2012, no. 5, pp. 53–56 (in Russian).
7. Dikalyuk A. S., Surzhikov S. T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge. *High Temperature*, 2012, vol. 50, no. 5, pp. 571–578. <https://doi.org/10.1134/S0018151X12040050>
8. Arutyunyan R. V. Simulation of the temperature and electric fields by high-current pulse to the electrode. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 138–144 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-138-144>
9. Kosarev N. P., Makarov V. N., Ugolnikov A. V., Makarov N. V., Dyldin G. P. Mine aerology of dust aerosols under conditions of hydro-vortex coagulation. *News of the Ural State Mining University*, 2020, iss. 4 (60), pp. 155–165 (in Russian). <https://doi.org/10.21440/2307-2091-2020-4-155-165>



10. Kirsh A. A., Makaveev P. Yu., Kirsh V. A. Collection of metal aerosol nanoparticles at high temperature. *Colloid Journal*, 2020, vol. 82, no. 2, pp. 122–129. <https://doi.org/10.1134/S1061933X20020052>
11. Balashov A. M. A way to increase the efficiency of electrostatic precipitators for cleaning emissions from metallurgical complex enterprises. *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya* [Trends in the Development of Science and Education], 2020, no. 58–5, pp. 88–91 (in Russian). <https://doi.org/10.18411/lj-02-2020-108>
12. Tada Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas–solid suspension flow by applying electric field. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 93, pp. 778–787. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.063>
13. Jaiswal S., Hall T., LeBlanc S., Mukherjee R., Thomas E. Effect of magnetic field on the phase transition in a dusty plasma. *Physics of Plasmas*, 2017, vol. 24, iss. 11, 113703. <https://doi.org/10.1063/1.5003972>
14. Shagapov V. Sh., Galimzyanov M. N., Agisheva U. O. Solitary waves in a gas–liquid bubble mixture. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 232–240 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-232-240>
15. Varaksin A. Yu. Effect of particles on carrier gas flow turbulence. *High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 3, pp. 423–444. <https://doi.org/10.1134/S0018151X15030207>
16. Vatuzov D. N., Puring S. M. Method of selection and calculation devices air cleaning from condensed aerosols. *Urban Construction and Architecture*, 2016, vol. 6, no. 2 (23), pp. 14–18 (in Russian). <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2016.02.3>
17. Meshalkina M. N., Tsvetkov V. A., Popov B. I. Detection of fire situations by control of gassing and aerosol nanoparticles. *Natural and Technological Risks (Physics-Mathematical and Applied Aspects)*, 2015, no. 2 (14), pp. 27–33 (in Russian).
18. Kutushev A. G., Rodionov S. P. Interaction of weak shock waves with a layer of a powdered medium. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 405–413.
19. Kharitonov V. P. Dynamics of convective thermal waves in a porous continuum. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, pp. 283–290. <https://doi.org/10.1134/S0015462813030010>
20. Mikhailenko K. I., Kuleshov V. S. Numerical modelling of inhomogeneity scale of a flow rate behind the porous barrier. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2015, vol. 20, no. 6, pp. 46–58 (in Russian).
21. Fomin V. M., Fedorov A. V. Research in mechanics of reacting homogeneous and heterogeneous media at the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 223–231. <https://doi.org/10.1134/S0010508215020069>
22. Moiseeva K. M., Krainov A. Yu. The influence of the coal dust composition on the propagation speed of the combustion front of the coal dust with an inhomogeneous particle distribution in the air. *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 221–230 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-2-221-230>
23. Krivenko I. V., Smirnova M. A. Modeling the effects of electromagnetic radiation on natural aerosols. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2019, vol. 22, no. 4, pp. 64–79 (in Russian). <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.5>
24. Dmitrieva O. S., Madyshev I. N., Dmitriev A. V. Determination of the heat and mass transfer efficiency at the contact stage of a jet-film facility. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2017, vol. 90, no. 3, pp. 651–656. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1612-z>
25. Tukmakov A. L., Tukumakov D. A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state. *High Temperature*, 2017, vol. 55, no. 4, pp. 491–495. <https://doi.org/10.1134/S0018151X17030221>



26. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A. Generation of Acoustic Disturbances by a Moving Charged Gas Suspension. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, vol. 91, no. 5, pp. 1141–1147. <https://doi.org/10.1007/s10891-018-1842-8>
27. Tukmakov A. L., Tukmakov D. A., Kashapov N. F., Fazlyyakhmatov M. G. Process of the Deposition of Charged Polydisperse Gas Suspension on the Plate Surface in an Electrical Field. *High Temperature*, 2018, vol. 56, no. 4, pp. 481–485. <https://doi.org/10.1134/S0018151X18040193>
28. Tukmakov D. A. Numerical simulation of oscillations of an electrically charged heterogeneous medium due to inter-component interaction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 3, pp. 73–85 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-73-85>
29. Tukmakov D. A. Numerical investigation of the influence of properties of the gas component of a suspension of solid particles on the spreading of a compressed gas-suspension volume in a binary medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2020, vol. 93, no. 2, pp. 291–297. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02120-9>
30. Salyanov F. A. *Osnovy fiziki nizkotemperaturnoy plazmy, plazmennyykh apparatov i tekhnologij* [Fundamentals of Low-Temperature Plasma Physics, Plasma Devices and Technologies]. Moscow, Nauka, 1997. 240 p. (in Russian).
31. Fletcher C. A. *Computation Techniques for Fluid Dynamics*. Berlin etc., Springer-Verlang, 1988. 502 p.
32. Tukmakov A. L. Numerical simulation of the process of wave separation of solid particles in resonance gas vibrations in the closed pipe. *Acoustical Physics*, 2009, vol. 55, no. 3, pp. 345–352. <https://doi.org/10.1134/S1063771009030099>
33. Muzafarov I. F., Utyuzhnikov S. V. Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of a compressible gas. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1993, vol. 5, no. 3, pp. 74–83 (in Russian).
34. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyryni P. I. *Vychislitel'nye metody* [Computational Methods: in 2 vols.]. Moscow, Nauka, 1977. Vol. 2. 401 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 26.06.2021

Принята к публикации / Accepted 22.09.2021

Опубликована / Published 31.03.2022

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 103–111
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 103–111
<https://mmi.sgu.ru>
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-103-111>

Article

Attention based collaborative filtering

A. I. Romanov[✉], I. A. Batraeva

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Aleksey I. Romanov, romanow.lesha2013@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0136-1954>

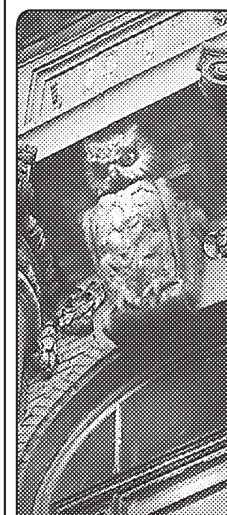
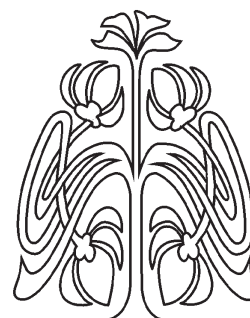
Inna I. Batraeva, BatraevaIA@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6539-8473>

Abstract. Attention mechanism invention was an important milestone in the development of the Natural Language Processing domain. It found many applications in different fields, like churn prediction, computer vision, speech recognition, and so on. Many state-of-the-art models are based on attention mechanisms, especially in NLP. As this technique is very powerful, we decided to investigate its application in solving a collaborative filtering problem. In this paper, we propose a standard framework for developing a recommender system engine based on transformer architecture. We could not reproduce current state-of-the-art results on MovieLens datasets, but in our implementation attention based model achieves competitive scores on MovieLens 1M and MovieLens 10M datasets.

Keywords: collaborative filtering, attention mechanism, deep learning, transformer, graph attention network

For citation: Romanov A. I., Batraeva I. A. Attention based collaborative filtering. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 103–111. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-103-111>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Научная статья
УДК 004.032.26

Коллаборативная фильтрация с механизмом внимания

А. И. Романов[✉], И. А. Батраева

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Романов Алексей Иванович, магистр компьютерных наук, romanow.lesha2013@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0136-1954>

Батраева Инна Александровна, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой технологий программирования, BatraevaIA@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6539-8473>

Аннотация. Изобретение механизма внимания в нейронных сетях стало важной вехой в развитии области обработки естественного языка. Оно получило множество приложений в различных областях, таких как прогнозирование оттока, компьютерное зрение, распознавание речи и т. д. Многие современные модели основаны на механизме внимания, например архитектура трансформера. Поскольку этот метод уже продемонстрировал свою эффективность, было решено изучить его применение при решении задачи коллаборативной фильтрации. В статье предлагается реализация механизма рекомендательной системы, основанного на архитектуре трансформера. Также в работе приведены результаты сравнительных экспериментов с классическими алгоритмами рекомендательных систем на общедоступном наборе данных.

Ключевые слова: коллаборативная фильтрация, механизм внимания, глубокое обучение, трансформеры, графовые нейронные сети с вниманием

Для цитирования: *Romanov A. I., Batraeva I. A.* Attention based collaborative filtering [Романов А. И., Батраева И. А. Коллаборативная фильтрация с механизмом внимания] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 103–111. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-103-111> Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Due to the exponential growth of the web information, web applications face new challenges in providing the best user experience service. Recommender systems are getting to be one of the core components of the web applications, where personalisation may increase users engagement or conversion rate. The most popular use cases are related to recommendations to buy a product, based on the user's historical purchases. Another famous application is a news feed generation on social networks. Recommendations of the entertainment content are also extremely powerful opportunities for recommender systems utilization. For example, in 2016 Netflix reported [1] that its recommender system influenced roughly 80% of streaming hours on the site and further estimated the value of the system at over \$1B annually. There are three main types of recommender systems [2]:

- collaborative filtering;
- content-based;
- hybrid methods.



Each of the methods has its own advantages and disadvantages. However, because of its relative simplicity of implementation, currently, the most popular technique is collaborative filtering. Collaborative filtering assumes that the model learns user's preferences based on its previous historical interactions. The common output of collaborative filtering models is users embedding matrix U and items embeddings matrix V . Where embedding means: vector representation of the object. This framework is influenced by a cold start issue: more than half of users and items have very little interaction history and it leads to noisy predictions for them. To address this problem, usually additional user and items features may be utilized as a useful signal, which will improve prediction accuracy for cold objects. This kind of architecture is called a hybrid recommender system. In this paper, we will not focus on content-based and hybrid methods.

1. Problem statement

A collaborative filtering method can be represented as a matrix factorization problem. Given a log of users and items interactions history. Each interaction is represented by triplets: (u_i, i_j, r_{ij}) , where r_{ij} is its rating, which was given by user u_i to item i_j . This log can be represented by interaction matrix M . Each row of the matrix is associated with the user, and each column is associated with the item. Each matrix cell will be a rating r_{ij} . In most cases, this matrix has around a 95% of sparsity rate [3], which means that most of the matrix elements will be empty. We have only partial information about the cells of this matrix, based on explicit or observed customer behavior. Explicit behavior may be a product rating given by a customer. Observed behavior tries to deduce how much a customer likes the product by implicit signals, for example, when a customer views a product, adds it to their cart, or purchases it. Our goal is to build a model that can predict the values of the empty cells of this interaction matrix. We try to approximate the interaction matrix as a product of two matrices of lower dimensions, user factors, and item factors: $M = U * V$. The scalar product of a row of matrix U and a column of matrix V gives a predicted item rating for the missing cells. Predictions for known items should be as close to the ground truth as possible. We fit those two matrices with known data using optimization algorithms.

2. Traditional collaborative filtering algorithms

2.1. Latent factor model

Latent factor models map both users and items to a joint low-dimensional latent space, where the user-item preference score is estimated by vector inner product.

We denote user latent vectors as $U = [u_1, \dots, u_N] \in \mathbb{R}^{N \times K}$ and item latent vectors as $V = [v_1, \dots, v_Q] \in \mathbb{R}^{Q \times K}$, where $K < \min(N, Q)$ is the latent feature dimension. The preference score \hat{r}_{ij} is estimated as:

$$\hat{r}_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle = u_i^T v_j.$$

Xiangnan et al. [4] defined the objective function as regularized squared loss on observed ratings:

$$\arg \min(U, V) \sum_{(i,j) \in Y} (r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2 + \lambda (\|U\|^2 + \|V\|^2),$$

where λ controls the strength of regularization, which is usually an L_2 norm to prevent overfitting, Y denotes the set of observed interactions. After we obtain the optimized user and item vectors, the recommendation is then reduced to a ranking problem according to the estimated scores \hat{r}_{ij} .



2.2. Weighted regularized matrix factorization

It is problematic to apply traditional matrix factorization to implicit feedback, because we only observe positive feedback (e.g., $r_{ij} = 1, \forall r_{ij} \in Y$). We cannot ignore the unobserved user-item interactions, otherwise it will lead to trivial but useless solutions (e.g., collapsing all the latent vectors to a single point). Also, we cannot assume these unobserved interactions as negative either, as we do not know the fact that these interactions did not happen, was because the user did not like the item or the user was not aware of it. To address these issues, Hu et al. and Pan et al. proposed weighted regularized matrix factorization (WRMF) [5] that includes all the unobserved user-item interactions as negative samples and uses a case weight c_{ij} to reduce the impact of these uncertain samples, i.e.:

$$\arg \min(U, V) \sum_{(i,j) \in M} c_{i,j}(r_{ij} - \hat{r}_{ij}) + \lambda (\|U\|^2 + \|V\|^2),$$

where M denotes a set of observed and unobserved interactions, case weight c_{ij} is larger for observed positive feedback and smaller for unobserved interactions.

2.3. Bayesian Personalized Ranking

BPR is a well-known framework for addressing the implicitness in CF. Instead of point-wise learning as in WRMF, BPR models a triplet of one user and two items, where one of the items is observed and the other one is not. Specifically, from the user-item matrix R , if an item j has been viewed by user i , then it is assumed that the user prefers this item over all the other unobserved items.

The optimization objective for BPR is based on the maximum posterior estimator [6]. In particular, by applying the above latent factor models, a widely used BPR model is given as:

$$\arg \min(U, V) \sum_{(i,j) \in Y} -\ln \delta(\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ik}) + \lambda (\|U\|^2 + \|V\|^2),$$

where δ is the logistic sigmoid function and λ is a regularization parameter. The training data Y_B is generated as:

$$Y_B = \{(i, j, k) | j \in Y(i) \wedge k \in I \setminus Y(i)\},$$

where I denotes the set of all items in the dataset and $Y(i)$ represents the set of items that are interacted by the i -th user. The semantics of $(i, j, k) \in Y_B$ is that item j is assumed to be preferable over k by user i .

2.4. Neural collaborative filtering

One of the first attempts to utilize neural networks to address a collaborative filtering task was the neural collaborative filtering approach. By replacing the inner product with a neural architecture the model learns how to approximate user-item interaction function.

Model structure. The Embedding layer follows the input layer; it is a fully connected layer that projects the sparse representation to a dense vector. The obtained user (item) embedding can be seen as the latent vector for a user (item) in the context of the latent factor model. The user embedding and item embedding are then fed into a multi-layer neural architecture, which the authors term as neural collaborative filtering layers, to map the latent vectors to prediction scores. The final output layer is the predicted score \hat{r}_{ij} , and training is performed by minimizing the pointwise loss between \hat{r}_{ij} and its target value r_{ij} .



NCF's predictive model:

$$\hat{r}_{ij} = f(P^T v_i^U, Q^T v_j^I | P, Q, \theta_f),$$

where $P \in \mathbb{R}^{M \times K}$ and $Q \in \mathbb{R}^{N \times K}$ denote the latent factor matrix for users and items, respectively; and θ_f denotes the model parameters of the interaction function f . Since the function f is defined as a multi-layer neural network, according to [7] it can be formulated as:

$$f(P^T v_i^U, Q^T v_j^I) = \phi_{out} (\phi_x (\cdots (\phi_2 (\phi_1 (P^T v_i^U, Q^T v_j^I))))),$$

where ϕ_{out} and ϕ_x respectively denote the mapping function for the output layer and x -th neural collaborative filtering (CF) layer and there are X neural CF layers in total.

To learn model parameters, existing pointwise methods largely perform a regression with squared loss:

$$L = \sum_{(i,j) \in Y \cup Y^-} w_{ij} (r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2,$$

where Y denotes the set of observed interactions, Y^- denotes the set of negative instances, which can be all unobserved interactions and w_{ij} is a hyperparameter denoting the weight of training instances (u, i) .

3. Related work

3.1. Attention mechanism

Attention mechanism has become an integral part of compelling sequence modeling and transduction models in various tasks, allowing modeling of dependencies without regard to their distance in the input or output sequences. Innovation of the transformer model was based on the assumption that it is not necessary to use recurrent neural networks in conjunction with attention to achieve state-of-the-art performance. New model architecture eschews recurrence and instead relies entirely on an attention mechanism to draw global dependencies between input and output.

The Transformer allows for significantly more parallelization and can reach a new state of the art performance on a wide range of NLP tasks using stacked self-attention and pointwise, fully connected layers for both the encoder and decoder.

Encoder: The encoder is composed of a stack of $N = 6$ identical layers. Each layer has two sub-layers. The first is a multi-head self-attention mechanism, and the second is a simple, position wise fully connected feed-forward network.

Decoder: The decoder is also composed of a stack of $N = 6$ identical layers. In addition to the two sub-layers in each encoder layer, the decoder inserts a third sub-layer, which performs multi-head attention over the output of the encoder stack.

An attention function can be described as mapping a query and a set of key-value pairs to an output, where the query, keys, values, and output are all vectors. The output is computed as a weighted sum of the values, where the weight assigned to each value is computed by a compatibility function of the query with the corresponding key. The input consists of queries and keys of dimension d_k and values of dimension d_v .

According to [8], attention mechanism can be computed as a dot product of the query with all keys, divide each by $\sqrt{d_k}$, and apply a *Softmax* function to obtain the weights on the values:

$$Attention(Q, K, V) = softmax \left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}} \right) V,$$



where Q is a matrix of queries, K is a matrix of keys, and V is a matrix of values. Multi-head attention allows the model to jointly attend to information from different representation subspaces at different positions:

$$MultiHead(Q, K, V) = Concat(head_1, \dots, head_h)W^O,$$

where

$$head_i = Attention(QW_i^Q, KW_i^K, VW_i^V).$$

The projections are parameter matrices:

$$W_i^Q \in \mathbb{R}^{d_{model} * d_q}, \quad W_i^K \in \mathbb{R}^{d_{model} * d_k}, \quad W_i^V \in \mathbb{R}^{d_{model} * d_v}$$

and

$$W^O \in \mathbb{R}^{hd_v * d_{model}}.$$

The Transformer, the first sequence transduction model based entirely on attention, replaces the recurrent layers and is most commonly used in encoder-decoder architectures with multi-headed self-attention.

3.2. Neighborhood-based collaborative filtering with attention

One of the first versions of attention applications in recommender systems was implemented for the neighborhood-based model by Mingsheng Fu and Hong Qu [9]. The key difference between neighborhood-based and model-based collaborative filtering systems is that model-based approach utilizes items similarity in combination with users similarity for rating prediction, however, neighborhood-based models use the only items similarity or users similarity, but not their combination. For prediction of the rating $\hat{r}_{u,i}$, neighborhood-based attention model uses a weighted average of known ratings of user u and the weight for a certainly known rating $r_{u,j}$ which is the value of attention between items i and j :

$$\hat{r}_{u,i} = \sum_{j \in N^k(u)} a_{i,j} r_{u,j},$$

where $N^k(u)$ is the items of the user u , and $a_{i,j}$ is the attention value of the item j in relation to the target item i . Embedding vectors of the items i and j are randomly initialized with Gaussian distribution. Attention values are calculated using the following formula:

$$a_{i,j} = Softmax(\exp e_i^T \hat{e}_j).$$

Embeddings e_i and \hat{e}_j are learned by minimizing the difference between $\hat{r}_{u,i}$ and $r_{u,i}$.

4. Proposed method

The interactions matrix can be represented as a bipartite graph (Fig. 1).

Graph Neural Networks aim to generalize neural networks to non-Euclidean domains such as graphs and manifolds. GNNs iteratively build representations of graphs through recursive neighborhood aggregation (or message passing), where each graph node gathers features from its neighbors to represent the local graph structure. According to [10], transformers can be regarded as GNNs which use self-attention for neighborhood aggregation on fully-connected node graphs.

We represent a user through the items, this user interacted with, analogically we represent the item — through the users, who interacted with this item. Basically, we represent the graph node through its neighbors.

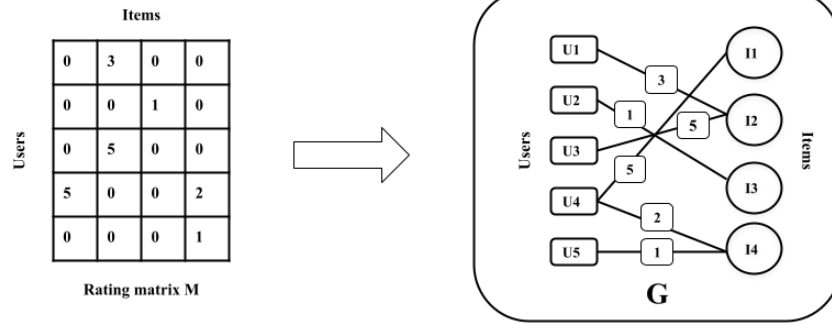


Fig. 1. User-Item interactions matrix representation as a bipartite graph

Let us model the interaction between User 4 (U_4) and Item 4 (I_4). First, we have to get U_4 representation. U_4 has 2 neighbors I_1 and I_4 (Fig. 2).

Inspired by NLP where each transformer input is a fully connected graph, which is one sentence, we will define U_4 representation as a sequence: $U_4 = \{I_1, I_4\}$. We do not include U_4 in the sequence intentionally, because users and items have different modality and embeddings should be optimized separately. These experiments we will leave for further work.

Now let us define the representation of the I_4 . This item has interactions with U_4 and U_5 (Fig. 3).

So we got the representation of I_4 as a sequence $I_4 = \{U_4, U_5\}$. Now the goal is to approximate the function $f(U_i, I_j) = r_{ij}$. For $i = 4$ and $j = 4$, it will be equivalent to $f(\{I_1, I_4\}, \{U_4, U_5\}) = 2$.

We define a transformer input sample as a pair of two sequences: sequence of the item (all neighbor users of this item) and sequence of the user (all neighbor items of this user). The target will be to predict the rating. For better convergence of the regression model, we will normalize the target to the scale of $[0, 1]$ using *min-max* transformation. The proposed method compared to the work in the paper [9] is not neighborhood-based. It is a model-based collaborative filtering system, because at each rating $\hat{r}_{u,i}$ prediction step, it takes into account user's u interactions history and item's i users associated. In the experiments, we will compare the proposed method with different baselines, including traditional methods and a novel method, based on the attention mechanism.

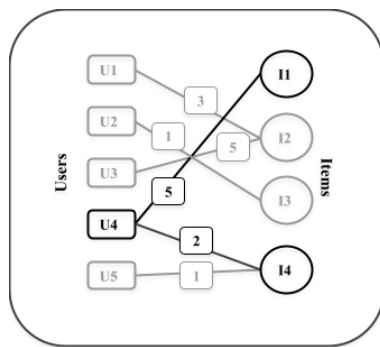


Fig. 2. User 4 graph representation

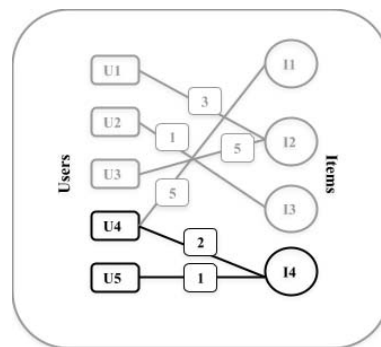


Fig. 3. Item 4 graph representation



5. Experiments

For the experiments, we used a publicly available MovieLens dataset [11]. To investigate the dependence of performance on the amount of data we used 100K, 1M, 10M versions of the dataset.

We compared our method with the following baseline methods.

- **Alternative least squares.** The iterative method of matrix factorization [4]. We used *implicit.als.AlternatingLeastSquares* framework implementation of the algorithm. We tuned model hyperparameters using a random search method.
- **LightFM.** Another implementation of matrix factorization. In contrast to the ALS algorithm, LightFM uses different optimization techniques, based on “Adagrad” or “Adadelta” optimizers. It is not an iterative method. The framework includes different versions of loss functions: “bpr”, “warp”, “warp-kos” [5].
- **Matrix factorization based on SGD.** We implemented vanilla matrix factorization [4]. This implementation uses stochastic gradient descent as an optimization algorithm.
- **Neural collaborative filtering.** As a neural network-based approach we used neural collaborative filtering with $L2$ regularization and “Adam” optimizer [7].
- **Neighborhood-based CF with attention.** The architecture is currently reported as a state-of-the-art model [9].

For evaluation, we used *Root Mean Square Error (RMSE)* on a global random 90:10 split, which can be computed as follows:

$$RMSE(\hat{r}) = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j I_{ij} (r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2}{\sum_i \sum_j I_{ij}}},$$

where I_{ij} indicates that entry (i, j) appears in the test set. Summarised experiments results are presented in the Table.

Despite the proposed method not outperforming current state-of-the-art methods, it still shows competitive scores on medium size datasets and the best performance on the huge dataset compared to other reproduced methods. It is worth pointing out that we could not reproduce the scores of the neighborhood-based attention model from the original paper, because it is not publicly available yet. In the Table we used original evaluation scores from the paper [9]. We will continue experiments with transformer-based collaborative filtering. Because the training process is computationally expensive, we are limited in hyperparameter tuning. For further experiments we will customize the transformer model to achieve the best performance on MovieLens datasets.

Table

Algorithms comparison on public dataset MovieLens

Method	MovieLens 100K	MovieLens 1M	MovieLens 10M
ALS	1.72	1.36	1.45
LightFM	3.23	2.82	3.07
Vanila MF	0.95	0.92	1.07
Neural CF	0.878	0.91	0.88
Neighborhood attention CF	–	0.836	0.766
Transformer	1.04	0.91	0.83



Conclusion

In this paper, we proposed an approach of training a state-of-the-art NLP technique to address a collaborative filtering task. We have shown how to achieve competitive results on the basic RecSys MovieLens dataset. We believe that in any machine learning task it can be beneficial to look for ideas and inspiration in different machine learning domains, like in our case in natural language processing. We have to note that reported results are suboptimal because as pointed out in the paper [12], the correct model evaluation requires significant effort on hyperparameters tuning and experiments setup.

References

1. Gomes-Urbe C. A., Hant N. The Netflix Recommender System: Algorithms, Business Value, and Innovation. *ACM Transactions on Management Information Systems*, 2016, vol. 6, no. 4, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1145/2843948>
2. Liu S., Bismas P. K. A Hybrid Recommender System for Recommending Smartphones to Prospective Customers. *CoRR*, 2021, vol. 23, pp. 2–3.
3. Strömquist Z. *Matrix factorization in recommender systems. How sensitive are matrix factorization models to sparsity?* Department of Statistics Uppsala University, 2018. 26 p.
4. Jingyuan Chen, Hanwang Zhang, Xiangnan He, Liqiang Nie, Wei Liu, Tat-Seng Chua. Attentive Collaborative Filtering: Multimedia Recommendation with Item- and Component-Level Attention. *Proceedings of the 40th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 2017, vol. 10, pp. 335–344. <https://doi.org/10.1145/3077136.3080797>
5. Wang K., Peng H., Jin Y. Sha Ch., Wang X. Local Weighted Matrix Factorization for Top- n Recommendation with Implicit Feedback. *Data Science and Engineering*, 2016, vol. 1, pp. 252–264. <https://doi.org/10.1007/s41019-017-0032-6>
6. Rendle S., Freudenthaler C., Gantner Z., Schmidt-Thieme L. Bayesian Personalized Ranking from Implicit Feedback. *Proceedings of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2009, vol. 10, pp. 452–461.
7. Xiangnan He, Lizi Liao, Hanwang Zhang, Liqiang Nie, Xia Hu, Tat-Seng Chua. Neural Collaborative Filtering. *Proceedings of the 26th International Conference on World Wide Web*, 2017, vol. 10, pp. 173–182. <https://doi.org/10.1145/3038912.3052569>
8. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A. N., Kaiser L., Polosukhin I. Attention is all you need. *Conference on Neural Information Processing Systems*, 2017, vol. 15, pp. 4–5.
9. Mingsheng F., Hong Q., Dagmawi M., Li L. Attention based collaborative filtering. *Neuro-computing*, 2018, vol. 311, pp. 88–98. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.05.049>
10. Veličković P., Casanova A., Lio P., Cucurull G., Romero A., Bengio, Y. Graph attention networks. *6th International Conference on Learning Representations, ICLR 2018 – Conference Track Proceedings*, 2018, vol. 12, pp. 2–3. <https://doi.org/10.17863/CAM.48429>
11. Harper F. M., Konstan J. A. The MovieLens Datasets: History and Context. *ACM Transactions on Interactive Intelligent Systems*, 2015, vol. 5, iss. 4, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1145/2827872>
12. Rendle S., Zhang L., Koren Y. On the Difficulty of Evaluating Baselines. *ArXiv preprint arXiv:1905.01395*, 2019, vol. 19, pp. 1–3.

Поступила в редакцию / Received 24.11.2021

Принята к публикации / Accepted 21.12.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 112–122

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 112–122

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-112-122>

Научная статья

УДК 519.713

О задаче обращения выходов нечетких дискретных систем

Д. В. Сперанский

Российский университет транспорта, Россия, 125993, г. Москва, ул. Часовая, д. 22/2

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры систем управления транспортной инфраструктурой, Speranskiy.dv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6882-0297>

Аннотация. Исследуется задача восстановления неизвестных входных последовательностей нечетких дискретных систем по их наблюдаемым выходам. В качестве математической модели нечетких систем используется нечеткий автомат (НА). Подобная задача рассматривалась ранее для детерминированных систем. Однозначные решения задачи для таких систем были получены с использованием модели конечных автоматов, названных автоматами без потери информации (БПИ-автоматами). В статье для нечетких дискретных систем, описываемых моделью НА, рассматривается в некотором смысле аналогичная задача. В силу специфики функционирования таких систем однозначное декодирование сообщений, поступающих на их входы, принципиально не всегда возможно. По этой причине возникают вопросы минимизации потери информации (по различным критериям) при решении задачи обращения. Введены автоматы, позволяющие решать такие задачи, названные автоматами с минимизированной потерей информации (НА МПИ-автоматами). Решение задачи обращения для НА представляет собой некоторое конечное множество входных слов. Каждое такое решение может быть оценено по различным критериям — мощности множества слов решения, вероятности появления этих слов на входах системы, трудоемкости получения различных вариантов решения. В статье с целью минимизации потерь информации сформулированы соответствующие оптимизационные задачи для НА и указаны возможные способы их решения. Рассмотрены различные разновидности НА МПИ-автоматов. Полученные результаты показывают, что рассмотренные задачи обращения для нечетких автоматов являются многокритериальными. Известно, что решения подобных задачи для дискретных систем традиционно оцениваются только по одному критерию.

Ключевые слова: нечеткие дискретные системы, нечеткие автоматы, обращение входов нечетких автоматов по наблюдаемым выходам, минимизация потерь информации

Для цитирования: Сперанский Д. В. О задаче обращения выходов нечетких дискретных систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 112–122. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-112-122>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Reversion of outputs of fuzzy discrete systems

D. V. Speranskiy

Russian University of Transport, 22/2 Chasovaya St., Moscow 125993, Russia

Dmitriy V. Speranskiy, Speranskiy.dv@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6882-0297>

Abstract. The problem of reversion of unknown input sequences of fuzzy discrete systems by its observed outputs is investigated. As a mathematical model of fuzzy systems the fuzzy automata (FA) is used. This problem has been considered earlier for deterministic systems. Unambiguous solutions of the problem for such systems have been obtained using the model of finite automata, called the information lossless automata (IL-automata). In the article, for fuzzy discrete systems described by the FA model a similar problem is considered. Due to the specifics of functioning of such systems, unambiguous decoding of messages coming to their inputs is not always possible in principle. For this reason, there are problems of minimization of information lossless (according to various criteria) while solving the address problem. Automata are introduced, which allow solving such problems, called automata with minimized information lossless (FA MIL-automata). Solution of the problem of reversion for FA is a finite set of input words. Each such solution can be estimated according to various criteria — the cardinality of a set of words of the solution, the probability of appearance of these words on the system inputs, the complexity of obtaining different variants of the solutions. In order to minimize information lossless, the article formulates corresponding optimization tasks for FA and specifies possible ways of solving them. Different kinds of FA MIL-automata are considered. The obtained results show that the considered problems of reversion for fuzzy automata inputs are multi-criteria. It is known that solutions of such problems for discrete systems are traditionally evaluated by only one criterion.

Keywords: fuzzy discrete systems, fuzzy automata, reversion of inputs of fuzzy automata on observed outputs, information loss minimization

For citation: Speranskiy D. V. Reversion of outputs of fuzzy discrete systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 112–122 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-112-122>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

С середины прошлого века и до нынешних дней проявляется активный интерес к исследованию обратных задач естествознания как в теории, так и в приложениях. Такие разработки проводились, например, в теории управления, результаты которых опубликованы в монографиях [1–3], а также в некоторых прикладных исследованиях, отраженных, к примеру, в работах [4, 5].

Отметим, что обратные задачи возникают и в такой важной области, как обеспечение высокой надежности различных технических систем. Один из способов ее решения связан с использованием так называемых схем встроенного контроля. Основан он на сравнении входных сигналов контролируемой системы с сигналами, восстанавливаемыми по ее выходам. Рассогласование их дает возможность зафиксировать появление ошибки в функционировании системы.

Предлагаемая статья посвящена задаче восстановления входов дискретной системы по ее выходам в случае, когда математической моделью системы является конечный



автомат [3, 6]. Однако информация о функционировании системы порой носит нечеткий (размытый) характер и потому формулируется в терминах плохо формализуемых понятий типа «почти равно», «достаточно близко», «много», «мало» и т. п. Ясно, что для адекватного отражения нечеткости такой информации требуются соответствующие средства, одним из которых стала теория нечетких множеств, разработанная Л. Заде. После публикации его основополагающей статьи [7] появились и были исследованы различные модификации моделей нечетких автоматов (НА). В монографии [8] прослежена эволюция и приведена библиография публикаций в этом научном направлении.

В предлагаемой статье нечеткость дискретных систем моделируется путем применения специального способа описания алгоритмов их функционирования, предложенного в [9], а в качестве математической модели таких систем используется НА. Там же представлен фрагмент теории экспериментов с автоматами (синхронизирующих, установочных, диагностических), названных обобщенными. Цель этих экспериментов заключается в том, что в результате их проведения удастся сократить неопределенность искомого состояния НА, представляемую в виде некоторого их множества. Мощность такого множества выступает в качестве естественной меры нечеткости полученного результата.

Рассматриваемые далее НА характеризуются тем, что решаемая для них задача обращения (отыскание неизвестных входов по наблюдаемым выходам), как и в случае других обобщенных экспериментов [9], упомянутых выше, имеет в общем случае не одно, а несколько возможных вариантов решения. Это приводит к необходимости минимизации неопределенности получаемого результата, достигаемого предложенным ниже методом восстановления входных слов.

Автоматы, исследуемые в классической теории экспериментов, рассматриваются как преобразователи информации. Принятое получателем закодированное сообщение на выходах конечного автомата должно быть однозначно декодировано. Впервые автоматы, решающие такую задачу, были исследованы в работах Д. Хаффмена [10] и С. Ивена [11] и названы автоматами без потери информации (БПИ-автоматами).

В статье для нечетких дискретных систем, описываемых моделью НА, рассматривается в некотором смысле аналогичная задача. В силу специфики функционирования таких систем однозначное декодирование сообщений принципиально не всегда возможно, и потому, естественно, возникают задачи минимизации потери информации (по различным критериям) при решении задачи обращения. Автоматы, позволяющие решать такие задачи, будем называть автоматами с минимизированной потерей информации (НА МПИ-автоматами).

1. Описание модели нечеткого автомата

Используемая далее модель нечеткого автомата была представлена в [9]. Напомним, что в [9] нечетким конечным автоматом (НА) называется пятерка

$$A = (S, X, Y, \delta, \lambda), \quad (1)$$

где $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — конечное множество состояний, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное множество входов, $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ — конечное множество выходов, $\delta : S \times X \times [0, 1] \rightarrow S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \times [0, 1] \rightarrow Y$ — функция выходов. Функция δ имеет следующую интерпретацию: НА, находящийся в состоянии s , под воздействием входа x переходит в состояние s' , причем значение функции принадлежности элемента (s, x, s') нечеткому подмножеству $S \times X \times S$ равно некоторой величине $q \in [0, 1]$.



Функция δ , введенная выше, фактически порождает множество нечетких матриц $T(x)$ для каждого входа $x \in X$:

$$T(x) = [\mu_x(s_i, s_j)], \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2)$$

Здесь величина $\mu_x(s_i, s_j) \in [0, 1]$ является оценкой степени возможности перехода НА из состояния s_i в состояние s_j при воздействии входа x .

Функция выхода $\lambda : S \times X \times [0, 1] \rightarrow Y$ имеет следующую интерпретацию: НА, находящийся в состоянии s , под воздействием входа x инициирует выход y , причем значение функции принадлежности элемента (s, x, y) нечеткому подмножеству $S \times X \times Y$ равно некоторой величине $q \in [0, 1]$.

Функция λ фактически порождает множество матриц $\Lambda(x)$ для каждого входа $x \in X$:

$$\Lambda(x) = [v_x(s_i, s_j)], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \quad (3)$$

Здесь величина $v_x(s_i, s_j) \in [0, 1]$ является оценкой степени возможности выхода y_i НА при переходе его из состояния s_i при воздействии входа x .

2. Формулировка задачи и метод ее решения

Вначале приведем формулировку задачи, рассмотренную Д. Хаффменом [10]. Неизвестная входная последовательность (слово) V прикладывается к заданному автомату, находящемуся в известном начальном состоянии $s_0 \in S$, а реакция на эту последовательность (слово) может наблюдаться. Требуется построить эксперимент, проводимый с автоматом после приложения V , который распознает V .

Далее будем считать, что начальное состояние НА известно и может быть любым состоянием множества S .

Ниже рассматривается подобного рода задача, но в качестве преобразователя информации выступает не детерминированный автомат, как у Д. Хаффмена, а нечеткий автомат, описанный в предыдущем разделе статьи.

Введем некоторые понятия и обозначения, которые понадобятся в дальнейшем изложении. Пусть s_0 есть известное начальное состояние НА A и на него подано неизвестное входное слово $v = v_1, v_2, \dots, v_k$. Этот НА A выдает выходное слово $w = w_1, w_2, \dots, w_k$, которое наблюдается. По таблице переходов-выходов (или по графу НА A) построим множество всех возможных входных слов $V(s_0, w)$, которым соответствует выход w . Из них с использованием результатов установочного эксперимента (подробнее это будет описано ниже) выделим подмножество всех таких входных слов, которые при функционировании могут породить выход w НА A . Обозначим это подмножество слов через $w^{-1}(s_0, v)$.

Введем теперь следующее определение. НА назовем нечетким автоматом с минимизированной потерей информации (НА МПИ), если

$$\forall s_0 \in S, \quad v \in X^* \quad |w^{-1}(s_0, v)| < |V(s_0, w)|. \quad (4)$$

Здесь X^* означает множество всех слов в алфавите X .

Содержательный смысл понятия НА МПИ заключается в том, что такой инициальный автомат позволяет выделить минимальное множество входных слов, которые порождают выход w . Число таких слов может быть существенно меньше, чем мощность множества $V(s_0, w)$. Понятно, что это уменьшает нечеткость (размытость, неопределенность) решения рассматриваемой обратной задачи.



Будем полагать, что матрицы $T(x)$, $\Lambda(x)$, определяющие возможности изменений переходов состояний и выходов НА [9], заранее заданы и известно начальное состояние НА. Условимся также считать, что в процессе подачи неизвестного входного слова, т.е. в процессе движения НА по соответствующей траектории в пространстве его состояний, замещения состояния и/или выхода на ней происходит не более одного раза. Это ограничение не является принципиальным, но существенно сокращает трудоемкость процедуры обращения выходного слова НА и делает обозримым представленный ниже пример. Отметим, что упомянутое предположение в некотором смысле аналогично, например, часто принимаемому на практике предположению при диагностике цифровых систем о принадлежности их неисправностей классу одиночных константных неисправностей. Известно, что, как правило, последнее действительно имеет место.

Перейдем теперь к описанию метода распознавания искомых входных слов $w^{-1}(s_0, v)$ заданного инициального НА. Отметим, что он аналогичен методу, предложенному в [10].

При функционировании НА реализация альтернативного перехода состояний или альтернативного выхода НА фактически заменяет его соответствующим детерминированным автоматом (ДА). Понятно, что в результате всех таких замен моделирование работы НА эквивалентно моделированию функционирования множества полученных детерминированных автоматов.

Формально для построения множества всех таких детерминированных автоматов можно воспользоваться следующим приемом. В графе НА каждое альтернативное состояние s НА заменяется множеством состояний, содержащим все его альтернативы. При этом все входящие дуги состояния s заменяются дугами, входящими в каждый элемент множества альтернатив состояния s , а выходящие из них дуги направляются в состояние-преемник для s .

Далее для решения рассматриваемой задачи восстановления неизвестного входа воспользуемся идеей метода, предложенного в [10].

Опишем, как процесс распознавания неизвестного входного слова v для НА выполняется по аналогии с методом Д. Хаффмена. По наблюдаемой выходной последовательности (слову) w и таблице (графу) переходов-выходов НА определяем все возможные входные последовательности (пути в графе) v_1, v_2, \dots, v_k , которым соответствует выход w . Обозначим через $\tilde{S} = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\}$ множество состояний, в которые переходит автомат из состояния s_0 при подаче неизвестного слова. Теперь построим для множества состояний \tilde{S} так называемую обобщенную установочную последовательность (ОУП) v_H , введенную в [9], и приложим ее к автомату. Обозначим через \hat{S} множество состояний, в которые может перейти автомат после приложения v_H , а наблюдаемый при этом выход НА — через w_H . Далее по выходу ww_H для каждого $s \in \hat{S}$ возможно восстановить соответствующие неизвестные входные слова (их может существовать несколько), и множество всех таких слов и есть решение задачи обращения НА МПИ. Понятно, что каждое такое слово соответствует некоторому пути в структуре графа НА, описанной выше, ведущему из начального состояния НА в одно из состояний множества \hat{S} .

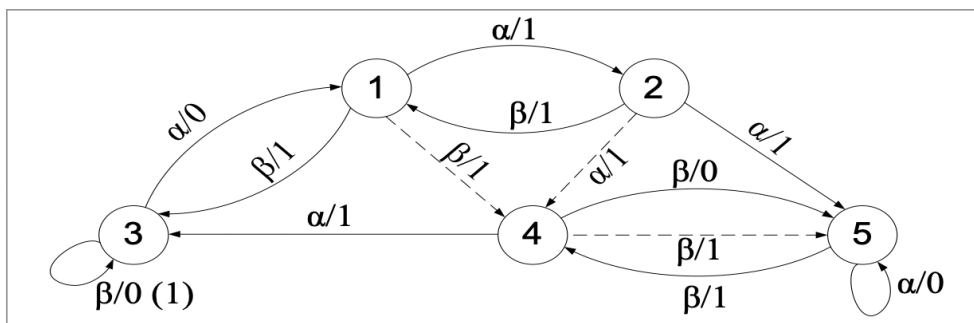
При решении рассматриваемой задачи обращения методом [10] для дискретного автомата (ДА) неизвестное входное слово восстанавливалось однозначно, если в ДА отсутствовали пары состояний с потерей информации [6]. Последнее влекло за собой требование минимальности ДА. В случае НА предполагается, что состояния с потерей информации в нем всегда присутствуют. Именно это является причиной



появления неоднозначности при решении задачи обращения. Поскольку требование однозначности восстановления неизвестного входного слова в случае НА отсутствует, то нет необходимости вводить аналог понятия эквивалентности состояний и, как следствие, аналог понятия минимальности НА, которое нами не используется.

Заметим, что понятие минимальности НА, вообще говоря, ввести можно, и даже различными способами. Выбор подходящего определения, по-видимому, должен определяться исходя из содержательного смысла рассматриваемой проблемы.

Проиллюстрируем предложенный метод на примере. Рассмотрим НА, заданный в виде ориентированного графа (рисунок).



Граф нечеткого автомата / Figure. Fuzzy automaton graph

На нем возможные альтернативные переходы изображены пунктирными дугами. Соответствующие альтернативные выходы НА представлены на дуге графа в круглых скобках после «основного» выхода. Как видно из рисунка, множество состояний НА есть $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, входной алфавит $X = \{\alpha, \beta\}$, выходной алфавит $Y = \{0, 1\}$. Пусть известно, что начальное состояние НА есть $s_0 = 1$. В представленном НА альтернативный переход имеется из состояния 1 (в состояние 4), из состояния 2 (в состояние 4), из состояния 4 (в состояние 5), а состояние 3 имеет альтернативный выход (1).

Пусть на вход этого НА подано неизвестное входное слово длины 3, а наблюдаемый выход есть $w = 1, 1, 1$. Требуется восстановить неизвестное входное слово.

Используя граф на рисунке, построим все возможные входные слова вида $v = v_1, v_2, v_3$, которые порождают выходное слово $w = 1, 1, 1$. Для заданного НА приведем 4 возможных входных слова и траектории движения НА при их подаче:

$$\begin{aligned}
 &1) 1 \xrightarrow{\alpha/1} 2 \xrightarrow{\beta/1} 1 \xrightarrow{\alpha/1} 2, \\
 &2) 1 \xrightarrow{\alpha/1} 2 \xrightarrow{\beta/1} 1 \xrightarrow{\beta/1} 3, \\
 &3) 1 \xrightarrow{\alpha/1} 2 \xrightarrow{\beta/1} 1 \xrightarrow{\beta/1} 4, \\
 &4) 1 \xrightarrow{\alpha/1} 2 \xrightarrow{\alpha/1} 1 \xrightarrow{\beta/1} 4.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из этих данных видно, что в трех из четырех возможных вариантов будет наблюдаться выход $w = 1, 1, 1$, когда альтернативных переходов в НА не происходит, а в третьем один такой переход имеется.

Представленные варианты траекторий порождаются в случае, когда число произошедших альтернативных переходов не более одного. Кроме них имеется еще три возможных траектории, которые используют два альтернативных перехода. Они исключены из дальнейшего рассмотрения из-за наложенного выше ограничения на



допустимую кратность альтернативных переходов. К примеру, траектория $1 \xrightarrow{\beta/1} 3 \xrightarrow{\beta/1} \xrightarrow{\beta/1} 3 \xrightarrow{\alpha/1} 3$ имеет два альтернативных перехода и потому исключена из дальнейшего рассмотрения.

Из приведенных выше четырех вариантов траекторий (5) следует, что множество состояний, в которые переходит НА после подачи неизвестного слова v , есть $\tilde{S} = \{2, 3, 4\}$. Теперь построим для заданного НА с этим множеством допустимых начальных состояний ОУП, определение которой и метод построения подробно изложены в [9]. Напомним, что содержательно подача ОУП на НА и наблюдение его выхода позволяет уменьшить число возможных состояний, в котором автомат может находиться после подачи ОУП [9].

Используя метод построения ОУП, предложенный в [9], в качестве такой последовательности получаем, например, ОУП $v_H = \alpha\beta$. Отметим, что таких последовательностей в общем случае может быть несколько. Ниже представлены траектории движения НА при подаче этой ОУП при допустимых начальных состояниях НА из множества \tilde{S} : 1) $2 \xrightarrow{\alpha/1} 5 \xrightarrow{\beta/1} 4$, 2) $3 \xrightarrow{\alpha/0} 1, \xrightarrow{\beta/1} 4$, 3) $3 \xrightarrow{\alpha/0} 1 \xrightarrow{\beta/1} 3$, 4) $4 \xrightarrow{\alpha/1} 3 \xrightarrow{\beta/0} 3$, 5) $4 \xrightarrow{\alpha/1} 3 \xrightarrow{\beta/1} 3$.

Как видно из этих данных, в ответ на подачу слова $\alpha\beta$ заданный НА может выдать соответственно выходные слова 11, 01, 01, 10, 11.

Понятно, что по наблюдаемой реакции становятся известными состояния множества $\tilde{S} = \{2, 3, 4\}$, в котором НА находится после подачи неизвестного слова v . Зная это состояние, из соотношений (5) определяются возможные входные слова НА, порождающие выходное слово $w = 1, 1, 1$. Так, если реакция на ОУП равна 1,1, то входное слово принадлежит множеству $\{\alpha\beta\alpha, \alpha\beta\beta\}$; если реакция есть 0,1, то входное слово принадлежит множеству $\{\alpha\beta\beta\}$; если реакция есть 10, то входное слово принадлежит множеству $\{\alpha\beta\beta, \alpha\alpha\beta\}$.

Трудоёмкость метода восстановления входного слова в основном определяется затратами на построение ОУП. Понятно, что чем меньше ее длина, тем меньше затраты. Отсюда возникает оптимизационная задача синтеза минимальной по длине ОУП. Естественной является также еще одна оптимизационная задача — это нахождение среди всех входных слов, являющихся решением задачи обращения, такого слова, вероятность появления которого на входе НА максимальна.

Неопределенность (нечеткость) полученного решения задачи обращения естественно оценивать по числу различных слов, входящих в него. Поэтому возникает оптимизационная задача синтеза ОУП, которая минимизирует упомянутую нечеткость.

Таким образом, задача восстановления неизвестного входного слова для нечетких автоматов может решаться по трем названным критериям в отдельности, либо их комбинации. Это принципиально отличает ее от той же задачи для детерминированного автомата [6], когда используется только один критерий — длина установочного эксперимента.

Кратко укажем на возможные методы решения перечисленных оптимизационных задач. Так, метод поиска минимальной по длине ОУП для НА, основанный на использовании так называемого обобщенного установочного дерева (УД), был предложен в [9].

Задача поиска возможных слов с максимальной вероятностью появления на входах НА может быть решена следующим образом. Матрица $T(x)$, фигурирующая при задании НА, состоит из чисел единичного отрезка, как указано в [9], определяющих степени возможности перехода НА из одного состояния в другое. Эти значения можно



интерпретировать как вероятности соответствующих переходов. Тогда для каждого слова в полученном решении задачи обращения легко вычислить вероятность его появления и получить решение оптимизационной задачи.

Наконец, алгоритм минимизации нечеткости решения обратной задачи для НА, т. е. мощности полученного множества возможных входных слов, может быть предложен на основе использования обобщенного установочного дерева (УД) [9]. Этот алгоритм достаточно очевиден и прост, поэтому мы не приводим его.

3. Разновидности нечетких автоматов МПИ

Для детерминированных автоматов в [12] автором предлагаемой статьи описаны и исследованы некоторые разновидности автоматов БПИ. Подобного рода разновидности естественно ввести и рассмотреть для нечетких МПИ-автоматов.

В предыдущем разделе понятие НА МПИ было введено в предположении, что его начальное состояние известно. Задачу обращения выходного слова по аналогии с [12] рассмотрим и для НА с неизвестным начальным состоянием (им может быть любое состояние НА), и соответствующий автомат будем называть обобщенным НА МПИ.

Введем теперь следующее определение. НА A с неизвестным начальным состоянием назовем нечетким обобщенным автоматом с минимизированной потерей информации (НА ОМПИ), если

$$\forall v \in X^* \quad |w^{-1}(v)| < |V(w)|. \quad (6)$$

Здесь $w^{-1}(v)$ есть множество слов НА, полученных при восстановлении всех возможных слов v , порождающих выходное слово w с учетом результата подачи некоторой ОУП v_H . Через $V(w)$ обозначено множество всех входных слов, порождающее выход w из любого состояния множества S НА по его графу (или таблице) переходов-выходов. В общем случае мощность множества $w^{-1}(v)$ может быть меньше мощности множества $V(w)$.

Легко показать, что метод восстановления входного слова для НА ОМПИ практически почти совпадает с соответствующим методом для инициального НА. Разница заключается лишь в следующем. Построение множества \tilde{S} (аналог такого же множества для инициального НА) выполняется в предположении, что автомат может стартовать из любого своего состояния (для инициального НА — только из заданного состояния s_0). Далее для автомата, находящегося в состояниях множества \tilde{S} , строится ОУП v_H , которая подается на вход этого автомата, и наблюдается выходное слово w_H . Наконец, так же как и для инициального НА, по наблюдаемому выходу w_H определяется множество неизвестных входных слов v , порождающих выходное слово w . Полученное множество и есть решение рассматриваемой задачи обращения.

Понятно, что если, как было видно из приведенного выше примера, даже для инициального НА такое множество может содержать несколько искомым возможных входных слов, то это справедливо и для НА ОМПИ.

Напомним, что в [6] было сформулировано понятие состояния с потерей информации (СПИ-состояние) и доказано следующее утверждение: конечный автомат является автоматом БПИ тогда и только тогда, когда он не имеет СПИ-состояний.

В [12] введено более общее, чем в [6], понятие: пара состояний s и t детерминированного автомата называется СПИ-состояниями, если

$$\exists p, q \in X^* \quad \delta(s, p) = \delta(t, q) \wedge \lambda(s, p) = \lambda(t, q) \rightarrow p \neq q.$$

Это понятие естественным образом распространяется и на НА.



Как было указано выше, функционирование работы НА эквивалентно функционированию соответствующего ему множества детерминированных автоматов (обозначим его через DA), получаемых при всех допустимых замещениях состояний и выходов рассматриваемого НА.

Используя этот факт, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы нечеткий автомат был НА ОМПИ, необходимо и достаточно, чтобы ни один из автоматов множества DA не имел пар СПИ-состояний.*

Доказательство теоремы почти дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.1 из [13], поэтому здесь не приводится.

В [12] для детерминированных автоматов предложено также обобщение автомата БПИ на случай, когда его входной и выходной алфавиты являются структурированными, т. е. $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, $Y = Y_1 \times Y_2 \dots Y_m$. Это означает, что каждое слово в таких алфавитах появляется по соответствующим n и m штук каналам. Для этого случая рассмотрена задача обращения неизвестных входных слов автомата по заданному фиксированному множеству k входных каналов в предположении, что выходы автомата наблюдаются только по фиксированному множеству l выходных каналов. Автоматы, для которых эта задача имеет единственное решение, естественно называть НА БПИ со структурированными алфавитами.

Можно показать, как такое обобщение легко распространяется и на НА МПИ со структурированными алфавитами, и можно получить необходимое и достаточное условие принадлежности НА к этому классу. Соответствующие условия формулируются в виде полного аналога теоремы, приведенной нами выше.

Как уже упоминалось, в [11] была введена и исследована разновидность инициальных БПИ-автоматов, названных БПИ-автоматами конечного порядка (БПИК-автоматами). Напомним, что для них возможно однозначное решение задачи восстановления первого слова неизвестной входной последовательности по наблюдаемой выходной последовательности длины N . Здесь N есть минимальное значение (свое для каждого конкретного автомата), при котором сформулированная задача оказывается разрешимой.

По аналогии с описанными нами выше разновидностями нечетких МПИ-автоматов можно определить обобщенные МПИК-автоматы и МПИК-автоматы со структурированными входным и выходным алфавитами. Такие автоматы предполагают отказ от знания начального состояния нечеткого МПИ-автомата и, во-первых, возможность восстановления не всего, а только первого слова входной последовательности, и, во-вторых, его символов, подаваемых по входным каналам из заранее заданного подмножества всех входных каналов.

Мы не останавливаемся на формальном определении этих разновидностей нечетких МПИК-автоматов, поскольку соответствующая методология вполне очевидна по прецеденту определения обобщенных МПИ-автоматов.

Для решения таких задач в общем случае необходима формализация, которая влечет необходимость получения экспертных оценок используемых критериев и выявления имеющихся между ними отношений. Известно, что имеют место ситуации, когда применяемые критерии могут противоречить друг другу, либо действовать согласовано, либо быть совершенно независимыми.

Сейчас известны разные подходы к решению многокритериальных задач. Так, возможно выделение наиболее важного критерия и решение задачи при этом критерии.



Что касается остальных критериев, то они в этом случае играют роль дополнительных ограничений. Другой подход базируется, например, на упорядочении множества критериев и решении задачи последовательно по каждому критерию. Еще один известный подход связан со сведением задачи к одному критерию с использованием весовых коэффициентов для каждого критерия. Понятно, что в этом случае соответствующие коэффициенты должны быть получены путем экспертных оценок.

Многокритериальные задачи являются предметом специальных исследований, и им посвящено много публикаций. Такие исследования находятся вне рамок нашей статьи, но мы укажем две известные монографии [14, 15], которые посвящены этой проблематике.

Заключение

В статье введены и рассмотрены различные разновидности нечетких автоматов, являющихся в некотором смысле аналогами детерминированных БПИ-автоматов. Последние позволяют получать однозначные решения различных типов задач обращения неизвестных входных последовательностей по наблюдаемым выходам. Показано, что для нечетких автоматов аналоги подобного рода задач в общем случае в качестве решений имеют конечное множество различных входных последовательностей. Кроме того, поиск решений для НА возможно осуществлять по различным критериям, в то время как для детерминированных автоматов традиционно используется всегда только один критерий. В статье сформулированы соответствующие оптимизационные задачи для НА и указаны возможные способы их решения.

Список литературы

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
2. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев И. И. Методы робастного управления динамических систем. Москва : Физматлит, 2009. 222 с.
3. Elenberg S. Automata, Languages and Machines. New York ; London : Academy Press, 1974. 387 p.
4. Ковалев Ф. М., Козловский В. А., Щербак В. Ф. Обращение динамических систем переменной размерности в проблемах криптографического преобразования информации // Прикладная дискретная математика. 2008. № 2. С. 39–44.
5. Пушков С. Г. Обращение линейных систем на основе реализации в пространстве состояний // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 9–19. <https://doi.org/10.7868/S000233881801002X>
6. Gill A. Introduction to the Theory of Finite-State Machines. New York : McGraw-Hill, 1962. 218 p.
7. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, iss. 3. P. 338–353.
8. Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York : Academy Press, 1980. 236 p.
9. Сперанский Д. В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
10. Huffman D. A. Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines // IRE Transactions on Circuit Theory. 1959. Vol. 6, № 5. P. 41–59. <https://doi.org/10.1109/TCT.1959.1086614>
11. Even S. On information lossless automata of finite order // IEEE Trans. Elect. Comput. 1965. Vol. EC-14, iss. 4. P. 561–569. <https://doi.org/10.1109/PGEC.1965.263996>
12. Сперанский Д. В. Лекции по теории экспериментов с конечными автоматами. Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий, 2010. 287 с.



13. Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В. Контроль и преобразования дискретных автоматов. Киев : Наукова думка, 1975. 176 с.
14. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. Москва : Радио и связь, 1981. 347 с.
15. Steuer R. E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. New York : John Willey and Sons, Inc, 1986. 546 p.

References

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in Mathematical System Theory*. New York, McGraw-Hill, 1969. 358 p. (Russ. ed.: Moscow, Editorial URSS, 2004. 400 p.).
2. Ilyin A. V., Korovin S. K., Fomichev I. I. *Metody robastnogo upravleniya dinamicheskikh sistem* [Methods of Robust Control of Dynamical Systems]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 219 p. (in Russian).
3. Eilenberg S. *Automata, Languages and Machines*. New York, London, Academy Press, 1974. 387 p.
4. Kovalev F. M., Kozlovsky V. A., Scherbak V. F. Reversible dynamical systems of variable dimension in problems of cryptographic transformation of information. *Applied Discrete Mathematic*, 2008, no. 2, pp. 39–44 (in Russian).
5. Pushkov S. G. Inversion of linear systems on the basis of state space realization. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, pp. 7–17. <https://doi.org/10.1134/S1064230717050094>
6. Gill A. *Introduction to the Theory of Finite-State Machines*. New York, McGraw-Hill, 1962. 218 p.
7. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, vol. 8, iss. 3, pp. 338–353.
8. Dubois D., Prade H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York, Academy Press, 1980. 236 p.
9. Speranskiy D. V. Experiments with fuzzy finite state machines. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, pp. 278–291. <https://doi.org/10.1134/S0005117915020071>
10. Huffman D. A. Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 1959, vol. 6, no. 5, pp. 41–59. <https://doi.org/10.1109/TCT.1959.1086614>
11. Even S. On information lossless automata of finite order. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, 1965, vol. EC-14, iss. 4, pp. 561–569. <https://doi.org/10.1109/PGEC.1965.263996>
12. Speranskiy D. V. *Lektsii po teorii experimentov s konechnymi avtomatami* [Lectures on the Theory of Experiments with Finite Automata]. Moscow, Internet-Universitet Informatsionnykh Tekhnologiy, 2010. 287 p. (in Russian).
13. Bogomolov A. M., Grunsky I. S., Speransky D. V. *Kontrol' i preobrazovaniya diskretnykh avtomatov* [Control and Transformation of Discrete Automata]. Kiev, Naukova dumka, 1975. 176 p. (in Russian).
14. Kini R. L., Raifa H. *Prinyatie resheniy pri mnogikh kriterijakh: predpochteniya i zameshcheniya* [Decision-Making under Many Criteria: Preferences and Substitution]. Moscow, Radio i svyaz', 1981. 347 p. (in Russian).
15. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York, John Willey and Sons, Inc, 1986. 546 p.

Поступила в редакцию / Received 22.06.2021

Принята к публикации / Accepted 30.08.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 123–129

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 123–129

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-123-129>

Article

Analysis of technological trends to identify skills that will be in demand in the labor market with open-source data using machine learning methods

O. A. Khokhlova¹✉, A. N. Khokhlova²

¹East Siberian State University of Technology and Management, 40V Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia

²JSC Tinkoff Bank, 5 Golovinskoe Highway, Moscow 125212, Russia

Oksana A. Khokhlova, hohlovao@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0851-7587>

Alexandra N. Khokhlova, alexandra.khokhlova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3984-5022>

Abstract. The further development of society directly depends on the use of technologies connected with processing data arrays and identifying patterns with the help of computer means. In this study, machine learning methods allowed us to analyze technological trends using large open-source data on patents, which enable predicting future skills in demand in the labor market. It is of major importance in the context of the rapid development of technology, leading to large-scale technological changes that transform the social conditions of human life as a whole, the requirements for the skills of people, which in the future will cause the emergence of new specialties and the disappearance of existing professions. For this purpose, predictive regression models of groups of patents according to the International Patent Classification are built using machine-learning methods — classical forecasting methods, such as naive forecasting, simple exponential smoothing, and ARIMA. As a result of comparing the quality of the constructed models and choosing the best one, ARIMA models were identified, showing “fading” technologies if there is a decrease in the number of patents; promising technological directions if the growth is stable; or “breakthrough” technologies if there has been a sharp increase in recent years. The input variables of the models were the series of dynamics of patents of different classes in the form of historical data, the output variables were the predicted values of the number of patents of these classes of a certain technological trend. The algorithm was implemented in the high-level Python programming language. The research results will enable authorities, employers, educational institutions, etc. to make a forecast of the demand for existing, as well as new professional skills and competencies in the labor market.

Keywords: machine learning methods, ARIMA, technology trend, patent, labor market

For citation: Khokhlova O. A., Khokhlova A. N. Analysis of technological trends to identify skills that will be in demand in the labor market with open-source data using machine learning methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 123–129. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-123-129>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Научная статья
УДК 004.85

Анализ технологических трендов для выявления востребованных в будущем навыков на рынке труда по данным из открытого источника с использованием методов машинного обучения

О. А. Хохлова^{1✉}, А. Н. Хохлова²

¹Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40В

²АО «Тинькофф Банк», Россия, 125212, г. Москва, Головинское шоссе, д. 5

Хохлова Оксана Анатольевна, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой «Макроэкономика, экономическая информатика и статистика», <https://orcid.org/0000-0002-0851-7587>, hohlova.o@mail.ru

Хохлова Александра Николаевна, аналитик Департамента Тинькофф бизнес, <https://orcid.org/0000-0002-3984-5022>, alexandra.khokhlova@mail.ru,

Аннотация. Дальнейшее развитие общества напрямую зависит от использования технологий, связанных с обработкой массивов данных и выявления закономерностей компьютерными средствами. В данном исследовании методы машинного обучения позволили провести анализ технологических трендов по большим данным из открытого источника о патентах, позволяющих предсказать в будущем навыки, востребованные на рынке труда. Это имеет важное значение в условиях стремительного развития технологий, приводящих к масштабным технологическим изменениям, меняющим социальные условия жизни человечества в целом, требования к навыкам людей, которые в дальнейшем вызовут возникновение новых специальностей и исчезновение существующих ныне профессий. С этой целью в работе построены предиктивные регрессионные модели групп патентов согласно Международной патентной классификации при помощи методов машинного обучения — классических методов прогнозирования, таких как наивное прогнозирование, простое экспоненциальное сглаживание и ARIMA. В результате сравнения качества построенных моделей и выбора лучшей были выявлены модели ARIMA, показывающие: «угасающие» технологии, если происходит снижение числа патентов; перспективные технологические направления, если наблюдается стабильный рост; или «прорывные» технологии, если произошел резкий рост за последние годы. Входными переменными моделей явились ряды динамики патентов разных классов в виде исторических данных, выходными — прогнозные значения числа патентов этих классов определенного технологического тренда. Алгоритм реализовывался на высокоуровневом языке программирования Python. Результаты исследования позволят органам власти, работодателям, образовательным учреждениям и т. д. сделать прогноз востребованности ныне существующих, а также новых профессиональных навыков и компетенций на рынке труда.

Ключевые слова: методы машинного обучения, ARIMA, технологический тренд, патент, рынок труда

Для цитирования: *Khokhlova O. A., Khokhlova A. N. Analysis of technological trends to identify skills that will be in demand in the labor market with open-source data using machine learning methods [Хохлова О. А., Хохлова А. Н. Анализ технологических трендов для выявления востребованных в будущем навыков на рынке труда по данным из открытого источника с использованием методов машинного обучения] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 123–129. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-123-129>*

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Introduction

Under the conditions of rapidly advancing technology, many of the workforce processes will be automated or disappear due to a dramatic economic shift, significant disruptions in the labor market will occur, and businesses around the world may face risks from a shortage of skilled labor. In this regard, the state should comprehensively assess the potential prospects in the labor market, in accordance with this, update the educational strategy, systematically predict the evolution of skills in the future for the timely formation of professional competencies relevant to the labor market.

In our opinion, the demanded professions and skills can also be seen by focusing on technological trends emerging in the patent market. Patents usually protect what should appear on the market in five to seven years. Accordingly, if an increase in the number of patents in a certain area is visible, then we can conclude what will be in trend in the next few years, what knowledge and skills will be needed. For this, the study developed an algorithm for constructing predictive regression models for the number of patents using machine learning methods in the Python programming language.

1. Description of the algorithm and the used tools

At the first stage, data collecting was carried out. The primary initial data for the analysis were time series for different classes of patents according to the International Patent Classification (hereinafter – IPC) from the open portal <https://www.lens.org> for the period 2010–2020 which makes 2,250,000 records.

Further, a preliminary analysis of the data was made. Description of the source data and data cleaning and preparation for further analysis were accomplished. After this stage, 1,123,189 records remained, as well as 31 attributes.

Then the grouping of patents was carried out – from the set of data, patents were selected in the context of subsections according to the IPC and visualization of data by groups of patents, i.e. building time series in the form of line charts to identify technology trends:

- “dying” technologies (if there is a decrease in the number of patents);
- promising technological directions (if the growth is stable);
- “breakthrough” technologies (if there is exponential development, that is, a sharp increase in recent years).

At the next stage, predictive regression models of subsections / classes of patents according to the IPC were built on the basis of time series using machine learning methods – classical forecasting methods: naive forecasting, simple exponential smoothing, and ARIMA.

Time series of patents for 2010–2016 were selected as a training sample, patents for 2017–2019 were selected as a test sample. The forecast was based on 2020–2022. Next, we compared the results for assessing the quality of the models – the root mean square error (RMSE), which is necessary to check the accuracy of the models on test data, and select the best model.

The tool was the Python 3.8.5 programming language in Python. When developing the program code, the Python libraries were used: OS, Requests, NumPy, Matplotlib, Scikit-Learn.



2. Predictive modeling of technology trends to identify future skills in the labor market

According to experts, simple classical methods such as linear methods and exponential smoothing outperform complex methods such as decision trees, multilayer perceptrons (MLP), and long-term short-term memory (LSTM) network models. The research was carried out on a diverse set of more than 1000 one-dimensional time series forecasting problems. The results showed that deep learning methods have not yet met their expectations for univariate time series forecasting, and there is still a lot of work to be done in their development [1]. Therefore, in this work, predictive regression models are developed using classical forecasting methods, such as naive forecasting, simple exponential smoothing, and ARIMA [2].

As an implementation of the algorithm, the article presents examples of different technological trends by groups of patents according to the IPC. Therefore, in Figures 1, 2, 3, there are groups of patents that can be attributed to technological trends of future development, since they show a steady increase in the number of patents. The best model was the ARIMA model, as evidenced by the low RMSE (Table 1).

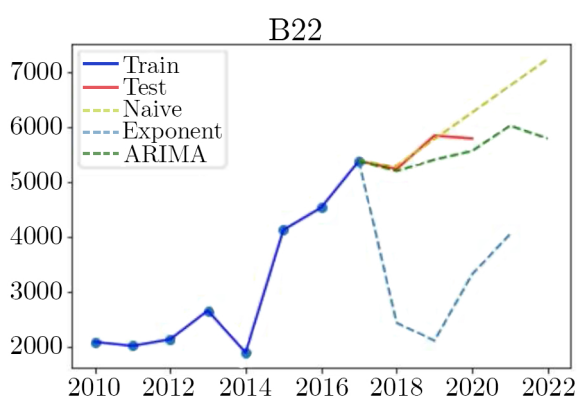


Fig. 1. Modeling the number of patents in subsection B22 “Foundry production; powder metallurgy” (color online)

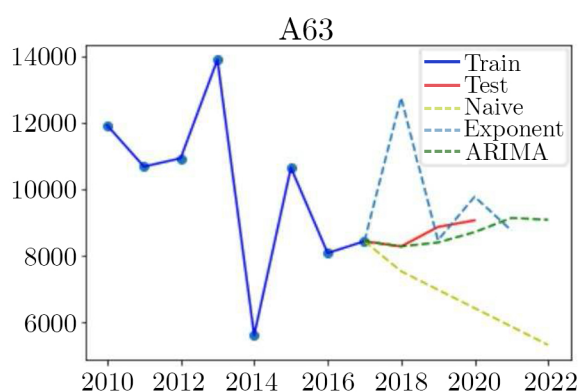


Fig. 2. Modeling the number of patents in subsection A63 “Sports; games; entertainment” (color online)

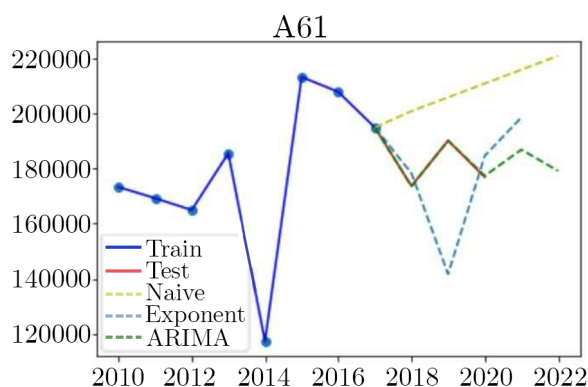


Fig. 3. Modeling the number of patents in subsection A61 “Medicine and veterinary medicine; hygiene” (color online)



Table 1

Root mean square error (RMSE) of patent subsections B22, A63 and A61

IPC patent subsections	Naive Forecasting	Simple Exponential Smoothing	ARIMA
B22 “Foundry production; powder metallurgy”	242.0	2647.4	221.6
A63 “Sports; games; entertainment”	1672.7	2282.5	129.8
A61 “Medicine and Veterinary Medicine; hygiene”	23103.9	24688.9	15724.4

Examples of “dying” technology trends are shown in Table 2 and Figures 4, 5.

In recent years, there has been a strong decline in patents for bookbinding, animal and vegetable oils. In the first case, from 2015, in the second, from 2017.

Examples of “breakthrough” technologies include patents of subsections B64 “Aeronautics; aviation; cosmonautics”; B33 “Layer-by-layer synthesis technology” which refer to patents related to the manufacture of three-dimensional (3D) objects with the help of additive deposition, additive agglomeration or additional layering, for example,

Table 2

Root mean square error (RMSE) of patent subsections B42 and C11

IPC patent subsections	Naive Forecasting	Simple Exponential Smoothing	ARIMA
B42 Bookbinding; albums; means of classification and storage of documents, etc.; special types of printed materials	331.2	217.7	368.2
C11 “Animal and vegetable oils; fats, fatty substances and waxes derived from them fatty acids; detergents; candles”	780.1	1160.7	129.8

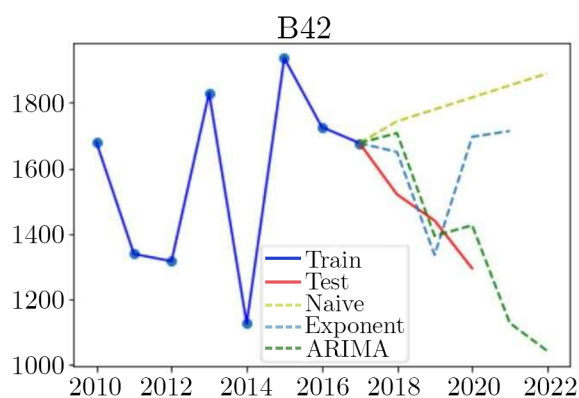


Fig. 4. Modeling of the number of patents for subsection B42 “Bookbinding; albums; means of classification and storage of documents, etc.; special types of printed materials” (color online)

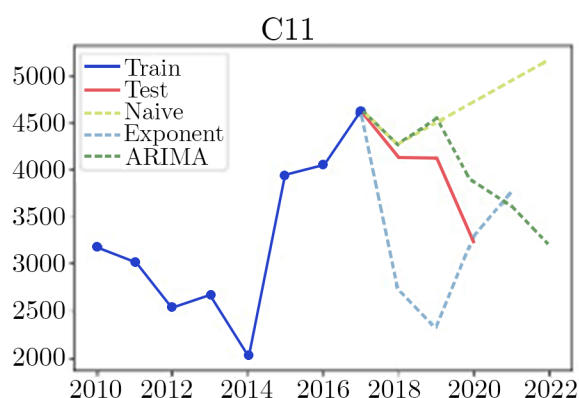


Fig. 5. Modeling the number of patents in subsection C11 “Animal and vegetable oils; fats, fatty substances and waxes derived from them fatty acids; detergents; candles” (color online)



through 3D printing, stereolithography, or selective laser sintering; class of patents — B22F “Powder metallurgy, production of products from metal powders” (Table 3 and Figures 6, 7, 8). Therefore, we can conclude that the labor market will continue to have a high demand for specialists and skills in these areas of activity.

Table 3

Root mean square error (RMSE) of subsections /classes of patents B64, B33, B22F

IPC patent subsections	Naive Forecasting	Simple Exponential Smoothing	ARIMA
B64 “Aeronautics; aviation; cosmonautics”	653.2	4089.9	577.5
B33 “Layer-by-layer synthesis technology”	1192.4	2136.6	720.2
B22F “Powder metallurgy, production of products from metal powders”	306.8	2252.4	173.3

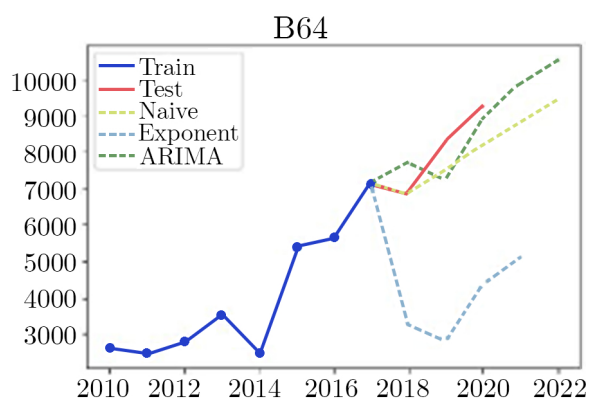


Fig. 6. Modeling the number of patents of subsection B64 “Aeronautics; aviation; cosmonautics” (color online)

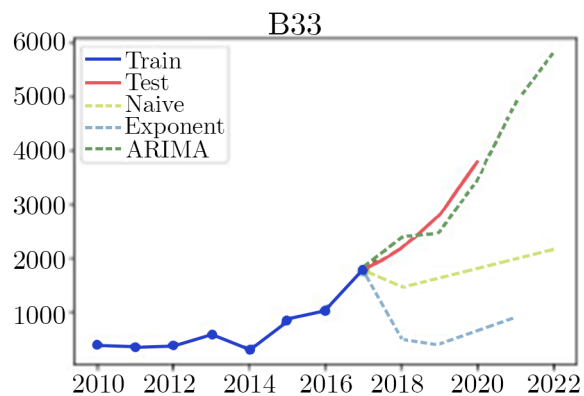


Fig. 7. Modeling the number of patents of subsection B33 “Layer-by-layer synthesis technology” (color online)

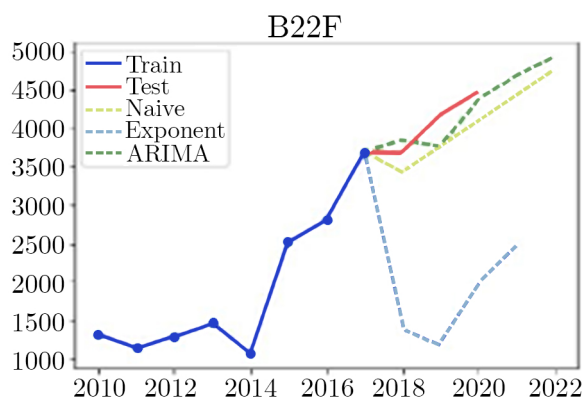


Fig. 8. Modeling the number of patents of subsection B22F “Powder metallurgy, production of products from metal powders” (color online)



In all of the abovementioned examples of predicting the number of patents in the context of patent subsections according to IPC by machine learning methods — naive forecasting, simple exponential smoothing, and ARIMA — the best model is the ARIMA model, as evidenced by the low root mean square error (RMSE).

Thus, technological trends show that, depending on their development, it is possible to predict the demand for existing or new skills and professions, as well as their training, i.e. having big data, it is possible to form certain patterns in certain directions, the results of which will allow generalizations and certain conclusions to be drawn.

Conclusion

A study based on the developed algorithm for analyzing patents using machine learning in the Python programming language showed that if professions are currently in demand in the labor market, and the technological trend based on patents in this area has a promising or “breakthrough” development, then it is possible to do the conclusion that specialists and skills in this area are needed now and in the future, their training is important for the development of the economy.

It should also be noted that the proposed algorithm allows you to quickly and efficiently process large data on patents from open sources and build predictive regression models of technological trends for various classes of patents.

The results will enable researchers, public authorities to explore future professions and skills in the labor market; educational institutions to adjust training programs in accordance with modern employers’ requirements and future skills; employers to make decisions on the formation of new competencies in their field of activity, based on big data analytics and the use of machine learning methods; carry out a comparative analysis of in-demand vacancies in terms of quantitative and qualitative characteristics; for the applicant to see the demand for vacancies in the labor market and the development of new skills.

References

1. Brownlee J. *Comparing Classical and Machine Learning Algorithms for Time Series Forecasting*. Available at: <https://machinelearningmastery.com/findings-comparing-classical-and-machine-learning-methods-for-time-series-forecasting/> (accessed 28 August 2021).
2. Kuhn M., Johnson K. *Applied Predictive Modeling*. New York, Springer Science+Business Media, 2013. 600 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6849-3>

Поступила в редакцию / Received 07.12.2021

Принята к публикации / Accepted 21.12.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 130–137

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 130–137

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-130-137>

Article

Software implementation of ensemble models for the analysis of regional socio-economic development indicators

G. Yu. Chernyshova[✉], N. D. Rasskazkin

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Galina Yu. Chernyshova, cherny111@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6464-0408>

Nikita D. Rasskazkin, rasskazkin64@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6796-3616>

Abstract. To predict indicators, modern approaches based on machine learning are increasingly being used, as a result, additional tools appear for quantitatively assessing the level of development of socio-economic systems. One of the relevant approaches in machine learning is the use of ensemble methods. The purpose of this study is to develop an approach for processing panel data using special regression models, in particular, the ensembles. An application is presented to implement and compare various regression models, including GPBoost, for panel data used in regional statistics. The application was tested on the example of assessing the innovative potential of Russian regions.

Keywords: panel data, machine learning, boosting, decision tree, regional development

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-010-00465).

For citation: Chernyshova G. Yu., Rasskazkin N. D. Software implementation of ensemble models for the analysis of regional socio-economic development indicators. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 1, pp. 130–137. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-130-137>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.688

Разработка приложения для реализации ансамблевых моделей в задаче анализа социально-экономических показателей

Г. Ю. Чернышова[✉], Н. Д. Рассказкин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Чернышова Галина Юрьевна, кандидат экономических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, cherny111@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6464-0408>

Рассказкин Никита Дмитриевич, бакалавр, rasskazkin64@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6796-3616>

Аннотация. При решении задачи анализа социально-экономических показателей применяются актуальные методы машинного обучения, на основе которых создаются современные



инструменты для оценки функционирования социально-экономических систем. Одним из перспективных подходов машинного обучения является использование ансамблевых методов. Целью данного исследования стала разработка подхода для обработки панельных данных с помощью специальных регрессионных моделей, в том числе с применением ансамблей. Представлено разработанное клиент-серверное приложение, позволяющее реализовать и сравнить различные регрессионные модели, в частности модель GPBoost, для панельных данных, используемых в региональной статистике. Приложение апробировано на примере оценки инновационного потенциала российских регионов.

Ключевые слова: панельные данные, машинное обучение, бустинг, дерево решений, региональное развитие

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-010-00465).

Для цитирования: Chernyshova G. Yu., Rasskazkin N. D. Software implementation of ensemble models for the analysis of regional socio-economic development indicators [Чернышова Г. Ю., Рассказкин Н. Д. Разработка приложения для реализации ансамблевых моделей в задаче анализа социально-экономических показателей] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 1. С. 130–137. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-130-137>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Panel data are generated in a series of measurements over several periods for the same objects and are often found in the analysis of socio-economic indicators [1,2], in particular, for the presentation of regional statistics. Currently, panel models are being developed, complementing classical methods with modern machine learning approaches [3,4]. The goals of this study are to design the architecture and develop an application that implements the forecasting of indicators of socio-economic development by R; selection, adjustment, and application of ensemble models. The competitiveness of the region can be interpreted as the efficiency of using the existing regional potential. One of the aspects of the region's competitiveness is the level of innovative development, for the assessment of which the developed application was applied. Various models were used to assess the innovative potential of the regions [5,6]. To predict the level of regional innovative development using panel regression in the test study, separate financial indicators are used that characterize the formation and use of resources of territories.

1. Applying regression models for panel data

In mathematical representation, panel data is represented as $y_{it}, x_{it}, i = \overline{(1, N)}, t = \overline{(1, T)}$, where N is the number of objects, T is the number of observation points. Balanced panel data will be used when describing balanced data models, which means that each time series included in the model has the same number of observation points. Then the total number of observation points is $N * T$, with $N > 1$ and $T > 1$. If $N = 1$, then the data will take the form of a time series, if $T = 1$, then the data will take the form of a slice.



The i -th object can be represented as follows:

$$y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix} X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{iT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{i1}^1 & X_{i1}^2 & \cdots & X_{i1}^k \\ X_{i2}^1 & X_{i2}^2 & \cdots & X_{i2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{iT}^1 & X_{iT}^2 & \cdots & X_{iT}^k \end{bmatrix} \epsilon_i = \begin{bmatrix} \epsilon_{i1} \\ \epsilon_{i2} \\ \vdots \\ \epsilon_{iT} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where y_i is a matrix of dimension $N * T$ containing the predicted parameters, ϵ_i is the error matrix of dimension $N * T$, X is the matrix of the original dataset of dimension, $N * T * k$, k is the number of parameters in each observation, ϵ_{it} is an error term.

Among the panel data analysis models, four main types can be distinguished [7]: a model based on the least-squares method (pooling); a model with a fixed effect (between); a model with a random effect (random); a model with a mixed effect.

The model based on the least-squares method is applicable in the case when there is no heterogeneity in the time series of objects, that is, there are no subsets in the group that are significantly influenced by factors unaccounted for in the sample.

$$y_{it} = X_{it}b + a + \epsilon_{it}, \quad (2)$$

where a is a free term, b is a regression coefficient.

In a fixed-effect model, a free a_i member can take different values for each object of the group. In this case, the regression equation has the form:

$$y_{it} = X_{it}b + a_i + \epsilon_{it}. \quad (3)$$

In a model with random effects, a_i are random variables. In such model, a_i are no longer interpreted as the values of some fixed parameters and are not subject to evaluation. In this case, the model has the form:

$$y_{it} = X_{it}(b + u_k) + a_i + \epsilon_{it}, \quad (4)$$

where u_k represents the random effects.

The random effects model is used in cases where the objects of the study are considered as a subset of the total sample. The advantage of random effects is that it is possible to include time-invariant variables.

The concept of basic models is introduced in the ensemble model of machine learning. Basic models are used to form more complex models by combining several of them. As a rule, the basic models have either a high offset or a large spread. In such cases, the idea of ensemble methods is to reduce the bias and/or spread of such basic models by combining them into one ensemble model that achieves better results. The use of tree boosting as a method of forming ensemble models allowed us to build more accurate models for various predictive tasks [8].

It is proposed to use different approaches for models based on panel regressions [9–11]. In this study, it is proposed to use the GPBoost algorithm based on gradient tree-boosting and mixed effects model [12].

For a mixed model, it is assumed that the predicted variable y is the sum of a potentially nonlinear function $F(X)$ and random effects:

$$y = F(X) + Zb + \epsilon, \quad b \sim \mathbb{N}(0, \Sigma), \quad \epsilon \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 I_n), \quad (5)$$



where y is response variable, function F presents fixed effects; X , Z are fixed and random effects predictor variable matrices, ϵ is the independent error term.

In the GPBoost algorithm, the functions $F(X)$ are constructed using an ensemble of trees. This boosting algorithm aims to minimize the risk functional $R(\hat{F}(X), \Theta)$:

$$R(\hat{F}(X), \Theta) : (\hat{F}(X), \Theta) \longrightarrow L(y > t : \Theta)_{F=F(x)}, \quad (6)$$

where $\hat{F}(X)$ is a linear span of a set of base learners, in our case decision trees, where $L(y > t : \Theta)$ is the negative log-likelihood of the model.

SMAPE and RMSE metrics will be used to evaluate the models. The choice of the SMAPE metric is due to its simple interpretation, as well as its resistance to outliers and the magnitude of the actual value. RMSE is a classical method of estimating the accuracy of regression, by which it is possible to identify the SMAPE bias in case of its occurrence.

2. Application development for panel regression modeling

To develop an application for analyzing socio-economic indicators using ensemble models, a client-server architecture has been chosen. When implementing the algorithms, the R 3.6 platform was used due to the presence of a wide range of specialized libraries for data analysis. The narrow specialization of R affects the limited functionality of the language in other areas, in particular, the server frameworks developed for R are inferior to their counterparts in other platforms. For this reason, the server-side is implemented using Python version 3.9.

In the process of designing an application to implement predictive models, it was proposed to use the Flask framework as a server, the PyQt5 framework for implementing the user interface, and Docker for deploying the server. This approach will ensure that the front-end and R packages are interoperable.

The developed software has an application with a user interface that sends HTTP requests to the REST API server and visualizes the received responses. The submitted requests are received by the Docker container and forwarded to the virtual port of the Ubuntu operating system. Then the request is processed by the Gunicorn server and passed to the Python application using the Flask framework. The data is converted by rpy2 library to the R data format. The converted data is sent to the client application and visualized.

The functionality of the developed application involves the following stages of data analysis: data input in CSV format; implementation of requests for data sampling by periods and objects; application of statistical tests to assess the heteroscedasticity of individual and temporal effects; selection of a predictive algorithm; setting the parameters of tree boosting.

The GPBoost model has several hyperparameters, which allows you to configure the model to increase its accuracy. The most significant parameters are the number of decision trees of the ensemble; the learning step; the maximum depth of the tree; and the minimum number of objects in the leaf of the decision tree. RMSE and SMAPE metrics will be used to evaluate panel data regression. The choice of the SMAPE metric is due to its simple interpretation, as well as its resistance to outliers and the magnitude of the actual value. RMSE is a classic method for estimating the accuracy of regression, which can reveal the SMAPE bias in case of its occurrence.



The interface of the developed application has three tabs: Data, Analysis, Regression. The Data tab allows you to select a file with panel data in CSV format and select the columns responsible for the object ID and period. The Analysis tab allows the user to visualize data panels by time periods or by objects (region identifiers are specified as objects), check data heteroscedasticity, and conduct a series of tests to select a panel data model (Figure). The Breusch-pagan, Honda, King and Wu, F test, Hausman test are used in the application [13]. The Regression tab allows the calculation of forecast values by the implemented algorithms including GPBoost.

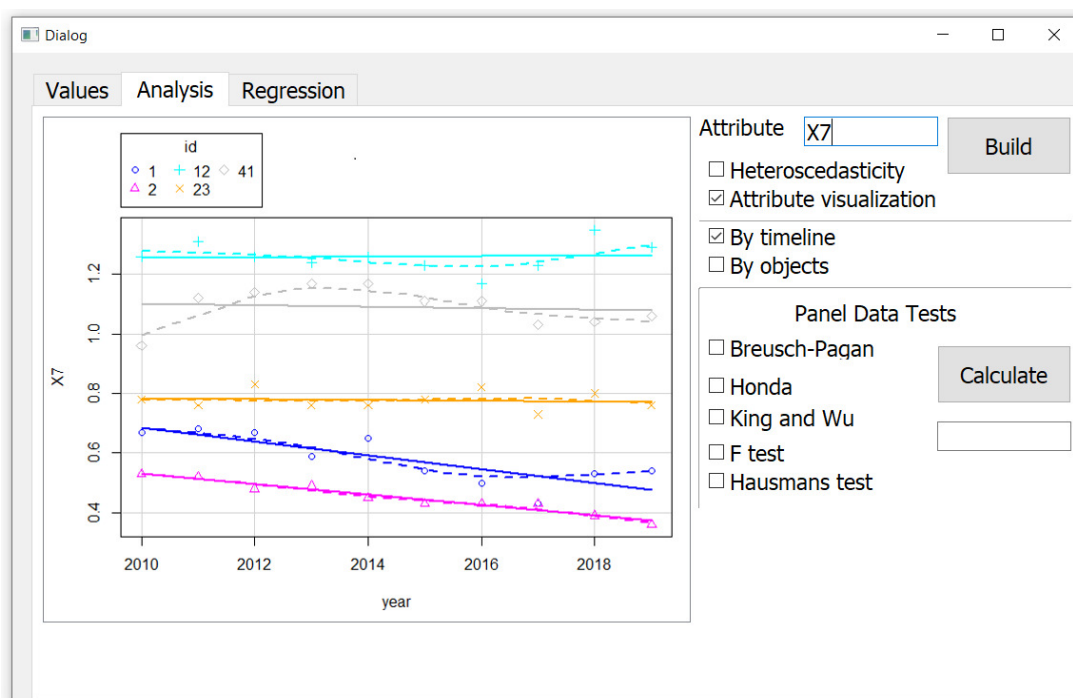


Figure. Application interface for implementing data analysis stages (color online)

The graphs shown in Figure are used for preliminary estimation of the data variability relative to different objects and different periods in advance. The architecture used makes it possible to implement the addition of new forecasting methods, use the application on different user platforms, and integrate the developed modules into existing information and analytical system.

3. Application of the developed application for regression analysis of the innovation potential of regions

To experiment, a sample has been used from the information analysis system FIRA [14]. This resource specializes in the aggregation and provision of information about various economic entities of the Russian Federation. The resulting sample contains information about the socio-economic indicators of 81 Russian regions. Each region is described by 28 indicators. The data are given for the period 2010–2019. The following indicators were selected for the training sample: the volume of innovative goods in the region, the ratio of debt and equity, the availability of own working capital, current liquidity, the share of loans and borrowings in short-term liabilities, capital return, asset



turnover. The volume of innovative goods in the region was chosen as the predicted variable because this indicator reflects the level of innovative regional development. The resulting sample does not contain missing values. This fact suggests that the sample is balanced. Each region as a sampling object has only 10 dimensions per the data for 2010–2019. The same set of parameters is used for all regions included in the sample, which makes the sample homogeneous. The property of balance and homogeneity allows using the resulting sample with different panel models.

The following way of the computational experiment is proposed. The GPBoost ensemble algorithm has been applied with different parameters of base learners. Boosting with trees as base learners has several tuning parameters. Arguably the most important one is the number of boosting iterations (number of trees). Other tuning parameters include the learning rate, the maximal tree depth, the minimal number of samples per leaf, the number of leaves.

Applied models differed by the values of the standard parameters of the algorithm, namely: p_1 is the number of decision trees of the ensemble; p_2 is the maximum depth of the tree; p_3 is the minimum number of objects in the leaf of the decision tree. The constructed models were compared by the RMSE and SMAPE metrics, as well as by the time spent on training the model. To experiment, the sample is divided into two parts: the period 2010–2017 for training models, 2018–2019 for the accuracy assessment of the constructed models. The computational experiment is divided into 2 stages. At the first stage, the number of trees (p_1) and the maximum depth of the tree (p_2) were simultaneously selected, at the second, the minimum number of objects in the tree leaf (p_3). Such selection of parameters p_1 and p_2 is because the number of decision trees and the maximum depth of the tree are largely interrelated parameters. For this reason, a model constructed using independently determined best values of parameters p_1 and p_2 will not necessarily show the best result. At the first stage, 6 models were built using different parameters p_1 and p_2 (Table 1). According to the results of the first part of the experiment, it turned out that the $M_{1.2}$ model showed high accuracy for both measures. However, it is worth noting that the $M_{1.5}$ model is slightly inferior in accuracy to $M_{1.2}$. For this reason, for further investigation of the GPBoost parameters, the values of the parameters p_1 and p_2 used in the $M_{1.5}$ model will be used, namely, 7 and 5, respectively.

At the second stage of the experiment, models $M_{2.1}$, $M_{2.2}$, and $M_{2.3}$ were constructed. These models have identical parameters with model $M_{1.5}$, p_1 and p_2 , but have different values of parameter p_3 (Table 2).

Changing different values of parameter p_3 did not give a significant accuracy increase. For the further experiment, model $M_{2.3}$ was chosen, which showed high accuracy of forecasting by RMSE and SMAPE. Parameters p_1 , p_2 , p_3 have values 7, 5, and 20 respectively.

Table 1

Selection of parameters p_1 and p_2

Model	p_1	p_2	RMSE	SMAPE
$M_{1.1}$	5	3	1.153	0.882
$M_{1.2}$	7	3	0.650	0.447
$M_{1.3}$	9	3	0.679	0.456
$M_{1.4}$	5	5	1.135	0.866
$M_{1.5}$	7	5	0.659	0.451
$M_{1.6}$	9	5	0.722	0.478

Table 2

Selection of parameter p_3

Model	p_3	RMSE	SMAPE
$M_{2.1}$	5	0.691	0.469
$M_{2.2}$	10	0.659	0.451
$M_{2.3}$	20	0.674	0.458



The obtained GPBoost model was compared with classical panel regression methods (Table 3). GPBoost model shows the highest prediction accuracy. The hybridization of methods, in particular, the using a set of decision trees into a single ensemble model gave more accurate models.

Table 3

Evaluation of panel regression models

Model	GPBoost	Pooling	Between	Random
RMSE	0.674	1.327	1.170	0.721
SMAPE	0.458	0.930	0.901	0.512

This model can be used to predict both the volume of innovative products and other indicators of regional development. The proposed approach based on hybrid methods of panel regression and decision trees provided a sufficiently high accuracy of the forecast relative to classical panel methods.

Conclusion

A developed client-server application providing implementation and comparison of various forecasting algorithms for panel data has been presented. The advantage of panel methods is the ability to account for bias due to unselected factors or undersampling. In addition, panel models have superior predictive accuracy with a relatively small sample size, which is typical for forecasting tasks related to regional statistics.

This application allows you to use panel data models with fixed and random effects, as well as a hybrid ensemble GPBoost model. The GPBoost model allows you to combine decision tree boosting methods and panel regression. The architecture of the application assumes the use of different R packages for data analysis. The application server-side is implemented on the Python platform. The user interface is realized by the PyQt5 framework. The extended functionality of the application provides loading and selection of data, execution of statistical tests for heteroscedasticity, panel model fitting, using the selected model to obtain a predicted value. A feature of this application is the possibility of preliminary analysis of a sample with panel data, comparison of various models by some widespread error measures.

The represented application is focused on the implementation of regression analysis of various aspects of regional development based on data with a panel structure to obtain a comprehensive assessment and forecast of the region's competitiveness as a whole.

References

1. Aivazian S. A. *Metody ekonometriki* [Methods of Econometrics]. Moscow, INFRA-M, 2019. 512 p. (in Russian).
2. Greene W. H. *Econometric Analysis*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 2003. 1026 p.
3. Hajjem A., Bellavance F., Larocque D. Mixed-effects random forest for clustered data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2014, vol. 84, iss. 6, pp. 1313–1328. <https://doi.org/10.1080/00949655.2012.741599>
4. Ke G., Meng Q., Finley T., Wang T., Chen W., Ma W., Liu T. Y. LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree. *Advances in neural information processing system*, 2017, vol. 30, pp. 3146–3154.

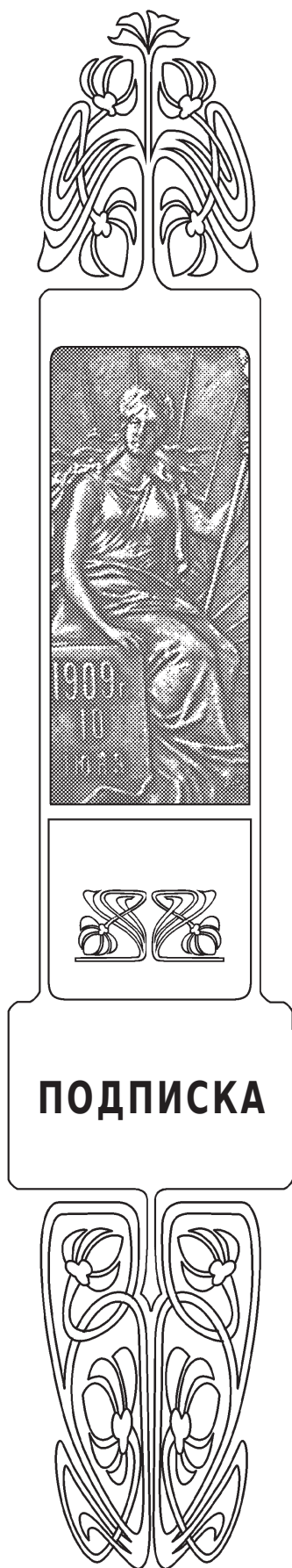


5. Firsova A., Chernyshova G. Efficiency analysis of regional innovation development based on DEA Malmquist index. *Information*, 2020, vol. 11, no. 6, 294. <https://doi.org/10.3390/info11060294>
6. Veshneva I., Chernyshova G. The scenario modeling of regional competitiveness risks based on the Chapman-Kolmogorov equations. *Journal of Physics: Conference Series (JPCCS)*, 2021, vol. 1784, iss. 1, 012008. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012008>
7. Gurka M. J., Kelley G. A., Edwards L. J. Fixed and random effects models. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2011, vol. 4, iss. 2, 181–190. <https://doi.org/10.1002/wics.201>
8. Breiman L., Friedman J. H., Stone C. J., Olshen R. A. *Classification and Regression Trees*. 1st ed. New York, CRC Press, 1984. 368 p. <https://doi.org/10.1201/9781315139470>
9. Laird N. M., Ware J. H. Random-effects models for longitudinal data. *Biometrics*, 1982, no. 38, pp. 963–974.
10. Pinheiro J., Bates D. *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. Springer Science & Business Media, 2006. 528 p.
11. Rasmussen C. E., Williams C. K. J. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 2006. 266 p.
12. Sigrist F. Gaussian Process Boosting. *arXiv preprint arXiv*, 2020.
13. Baltagi B. H. *Econometric Analysis of Panel Data*. 6th ed. Chichester, John Wiley & Sons, 2021. 436 p.
14. *Information Analysis System FIRA PRO*. Available at: <https://pro.fira.ru> (accessed 15 September 2021).

Поступила в редакцию / Received 24.11.2021

Принята к публикации / Accepted 21.12.2021

Опубликована / Published 31.03.2022



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017
Оформить подписку на печатную версию
можно в Интернет-каталогах
«Пресса России» (www.pressa-rf.ru)
«Пресса по подписке» (www.akc.ru)
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru)
Журнал выходит 4 раза в год
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: <https://mmi.sgu.ru>

ISSN 1816-9791

22001



9 771816 979101

ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Том 22, выпуск 1

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития

Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле

Серия: Социология. Политология

Серия: Физика

Серия: Филология. Журналистика

Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология

Серия: Экономика. Управление. Право

